零章 预 • 识

§0.1 概率空间

- 随 Å 试验= 概率空间(; $\mathscr{F}$; P).
- 样 空间/ 集/所有试验结 : .
- 样 / /试验结 : ! ,
- 事件/ f 集: $A; B; \cdots$. 于 ! 5 Ÿ /要求.
- 代数: $\mathscr{F}$. 集 系, 满 v n 条 5 Ÿ .
- 集 系$\mathscr{E}$ 生成 代数: $(\mathscr{E}) := \bigcap_{\mathscr{F}\text{是}\sigma\text{代数},\mathscr{F}\ldots\mathscr{E}} \mathscr{F}$.
- 一般 , 可 † 为非空集$\mathbb{X}$, 称$(\mathbb{X}; \mathscr{F})$ 为可 ÿ 空间.
- ~. l Ñ . . $\mathbb{X}$ 可数; 默认 $\mathscr{F} = 2^{\mathbb{X}} := \{A : A \subseteq \mathbb{X}\}$.
- ~. ë Y . . $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, 默认 $\mathscr{F} = \mathscr{B} :=$ (开集) = (区间).

- 概率: P. $\mathscr{F}$ þ 数, 满 v n 条 5 Ÿ:

非负 范 可列可加 5 .

- 一般 , 设$(\mathbb{X}; \mathscr{F})$ 为可 ÿ 空间. e $: \mathscr{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 满 v

$$(\varnothing) = 0 \quad \text{可列可加 5 ,}$$

则称 为$\mathscr{F}$ (½ $\mathbb{X}$) þ ÿ .

- 概率是 ÿ , 也称概率 ÿ .
- e $0 < (\mathbb{X}) < \infty$, 则有限 ÿ 可 一 z 为概率 ÿ ^.

$$\hat{}(A) := \frac{(A)}{(\mathbb{X})}; \quad \forall A \in \mathscr{F}:$$

- ~ . l Ñ . . $\mathbb{X}$ 可数.

概率 应$\mathbb{X}$ þ (概率)分 Ù 列 $\{\ _i : i \in \mathbb{X}\}$. (ÿ a 似.)

$$_i = (\{i\}), \quad \forall i \in \mathbb{X}.$$

- ~. ë Y . . $(\mathbb{R}; \mathscr{B})$. 称$\mathbb{R}$ þ 概率 ÿ 为分 Ù .
- 分 Ù 数 $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 满 v n 条 5 Ÿ:
  单 þ 升 范$(F(\infty) = 1$ & $F(-\infty) = 0)$ 右 ë Y .
- 5: F 是分 Ù 数; $\mathscr{E} = \{(-\infty; x] : x \in \mathbb{R}\}$ 交运算封 4 , 即

$$A; B \in \mathscr{E} \Rightarrow AB \in \mathscr{E};$$

  且 $(\mathscr{E}) = \mathscr{B}$. 在$(\mathbb{R}; \mathscr{B})$ þ 存在唯一 分 Ù 满 v

$$F(x) = \quad ((-\infty; x]); \quad x \in \mathbb{R}:$$

- 分 Ù 数$F \longleftrightarrow$ 分 Ù .
- n : e $\mathscr{E}$ 交运算封 4 且 $|_{\mathscr{E}} = \hat{}|_{\mathscr{E}}$, 则 $|_{\sigma p \mathscr{E} q} = \hat{}|_{\sigma p \mathscr{E} q}$.

§0.2 从随Å c þ 随Å 程

- 随Å c þ X : $\to \mathbb{R}$, $! \mapsto X(!)$, 满 v 可 ÿ 5 要求:

$$\{X \leqslant x\} := \{! : X(!) \leqslant x\} \in \mathscr{F}; \quad \forall x.$$

- l Ñ . 随Å c þ . X Š 范围为可数集 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$.
- - : X 分 Ù /分 Ù 列.

$$\{P(X = x) : x \in \mathbb{X}\}.$$

- 5 : 义随Å c þ X 时 • I 要(; $\mathscr{F}$), Ø I 要概率P.
  一般情况是X 出 g 某概率模 . , 因此有默 @ P.
- 5 :可 ÿ 5 要求:

$$\{X = x\} \in \mathscr{F}; \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

- 5 : 仅 I 5 P 在 $(X) :=$ $(\{\{X = x\} : x \in \mathbb{X}\})$ þ 限 › .
- 5 : (X) 是使 X 可 ÿ • 代数.

概率论课程中　离散型随机变量.

- ü　分Ù:

$$P(X=1)=p; \quad P(X=0)=1-p:$$

- 二项分Ù $B(n;p)$:

$$P(X=i)=C_n^i p^i (1-p)^{n\ \ i}; \quad i=0;1;\cdots;n:$$

- Ñ松分Ù:

$$P(X=n)=\frac{n}{n!}e^{\ \lambda}; \quad n=0;1;\cdots$$

- 几　分Ù:

$$P(X=n)=(1-p)^{n\ \ 1}p; \quad n=1;2;\cdots$$

- G 态.

  ~. 硬 1 , $S = \{H; T\}$.

  ~. 投骰 f , $S = \{$,橙, ‘ ,绿, 7 , b $\}$.

① ②

- 位 ˜ .

  ~. $S = \{1; \cdots ; 5\}$.

  X = (静态) â f 位 ˜ .

③ ④

- ~. 设 X 服从 Ñ 松分 Ù :

⑤

$$P(X = n) = \frac{\ n}{n!} e^{\ \lambda}; \quad n = 0; 1; \cdots$$

n 解为: 将 â f 按以 þ 分 Ù 列 ˜ 于$\mathbb{Z}$ ¥ 随 Å 位 ˜ X.

离散型随机向量.

- 随Å试验/概率模.: $(\ ;\mathscr{F};P)$. 设S为非空 可数集.
- 随Å向þ $\vec{X} = (X_1;\cdots;X_n)$. ¥, X_m: $\to S$, $\forall m$.
- $\vec{X}$ Š于S^n l Ñ.随ÅCþ.

$$S^n := \{\vec{x} = (x_1;\cdots;x_n) : x_1;\cdots;x_n \in S\};$$

$$\vec{x} = \vec{X}(!);\quad (x_1;\cdots;x_n) = (X_1(!);\cdots;X_n(!)):$$

- 称$\vec{X}$ (在S^n þ)分Ù为n维é 分Ù.(>缘/条件分Ù.)
- 5: 仅I 5P在 $(\vec{X})$ þ 限›,

$$(\vec{X}) = (X_1;\cdots;X_n) := \left(\{\{\vec{X} = \vec{x}\} : \vec{x} \in S^n\}\right)$$

$$= \left(\{\{X_m = i\} : 1 \leqslant m \leqslant n; i \in S\}\right):$$

- 5: $(\vec{X})$ 为使 所有X_m均可ÿ • 代数.
- 5: a似 ,可设$S_1;\cdots;S_n$均为可数集, X_m Š于S_m.

离散型随机变量序列.

- 无穷维向þ $X = (X_1; X_2; \cdots)$. ¥, X_m : → S, ∀m.
- 5: 仅I交代 Ü有限维é 分Ù.
- ~. 事件 á 5→ 随Å C þ á 5; á 同分Ù, i.i.d..
- ~. Bernoulli 试验. X,

$$P(X_1 = H; X_2 = H; X_3 = T) = p^2(1-p); \quad \cdots$$

- ~. $X_1; X_2; \cdots$ á 且 服从ë数为 Ñ松分Ù, •:

$$P(X_1 = i_1; \cdots; X_n = i_n) = e^{\lambda n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{i_k}}{i_k!}; \quad \forall n; \forall i_1; \cdots; i_n.$$

无穷维向þ $X=(X_1;X_2;\cdots)$ 仅I交代 Ü有限维é 分Ù.
为什 ？

- 仅I 5P 在 (X) þ 限›， ¥

$$(X):=(\{\{X_m=i\}:m\geqslant 1;i\in S\}):$$

为使 所有X_i 均可ÿ • 代数.

- $\mathscr{E}$ 满v交运算封4，且 $(\mathscr{E})=(X)$. ¥，

$$\mathscr{E}=\bigcup_{n\ 1}^{8}(X_1;\cdots;X_n)=\bigcup_{n\ 1}^{8}(\{\{X_m=i\}:1\leqslant m\leqslant n;i\in S\}):$$

- 由 n ，e $|_{\mathscr{E}}=\hat{\ }|_{\mathscr{E}}$, 则 $|_{\sigma p\mathscr{E}q}=\hat{\ }|_{\sigma p\mathscr{E}q}$.
- $|_{\mathscr{E}}$ 即为 Ü有限维é 分Ù.

离散时间参数、离散 G 态空间　随机过程.

- 即, l Ñ . 随 Å C þ S 列$\mathbb{X} = (X_0; X_1; X_2; \cdots)$.
- 将$\mathbb{Z}$　$= \{0; 1; 2; \cdots\}$ n 解为 l Ñ 时间. 时间 ë 数记为n.

  初始时刻$n = 0$,

  下一时刻$n = 1$,　①　②

  再下一时刻$n = 2, \cdots$
- $X_n =$　态　â f 在时刻n　位 ˜ ;

  ü C　系统在时刻n　G 态.　③　④

  ~ . $X_0 = 1; X_1 = 4; X_2 = 4; X_3 = 3; \cdots$

  ⑤
- $\mathbb{X}$ 记录下 â f　运　程/　;

  ½ 系统　ü C　程.

- ：以时间n 为g c þ　　Š 于位 ˜ 空间S　　数;
  无穷维向þ; 无穷长　S i 符串.
- 　空间:

$$S^{\mathbb{Z}_+} = \{x = (x_0; x_1; x_2; \cdots) : x_n \in S; \forall n \geqslant 0\}:$$

- X :　$\to S^{\mathbb{Z}_+}$:

$$x = X(!); \quad (x_0; x_1; x_2; \cdots) = (X_0(!); X_1(!); X_2(!); \cdots)$$

- 将X 改记为$\{X_n : n \geqslant 0\}$, 一 x 随 Å c þ .
- 进一Ú: 往谈论X 是　Š 于$S^{\mathbb{Z}_+}$　随 Å　　. 可 ÿ 5 要求?

推广随机变量 义—随机元.

- 随 Å c þ X : $\to \mathbb{R}$, $! \mapsto X(!)$, 满 v 可 ÿ 5 要求:

$$\{X \leqslant x\} := \{! : X(!) \leqslant x\} \in \mathscr{F}; \quad \forall x:$$

- 5 : $\mathscr{B} = \ (\mathscr{E})$, ¥ $\mathscr{E} = \{(-\infty; x] : x \in \mathbb{R}\}$.

$$\begin{array}{ccc} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \{X \leqslant x\} & \longleftarrow & (-\infty; x] \end{array}$$

- $X\ {}^{1}D := \{X \in D\}$, $X\ {}^{1}\mathscr{E} := \{X\ {}^{1}D : D \in \mathscr{E}\}$.

  题: 下图可交 †.

$$\begin{array}{ccc} X\ {}^{1}\mathscr{E} & \longleftarrow & \mathscr{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X\ {}^{1}\mathscr{E}) & \longleftarrow & (\mathscr{E}) \end{array}$$

- 称 $(X) := \ (\{X \leqslant x\} : x \in \mathbb{R})$ 为X 生成 代数. 它是使X 可 ÿ • 代数. 可 ÿ 5 要求 Ÿ 是 $(X) \subseteq \mathscr{F}$.

- 随Å试验/概率模．：(;$\mathscr{F}$;P).
- 设$(\mathbb{X};\mathscr{S})$ 为可ÿ空间．e X ： $\to \mathbb{X}$ 满v可ÿ 5要求:

$$\{X \in D\} \in \mathscr{F}; \quad \forall D \in \mathscr{S};$$

则称X 为 š$\mathbb{X}$ 随Å元.

- 5：称$\mathbb{X}$ þ 概率ÿ 为分Ù．
- $X \sim$ ，X 服从分Ù ，X 分Ù $_X$ 为 ：

$$P(X \in D) = \ (D); \quad \forall D \in \mathscr{S}:$$

~. l Ñ时间ë数 l Ñ G态空间 随Å 程.

- 设(; $\mathscr{F}$; P) 为概率模 . , S 为可数集,

  $X = (X_0; X_1; X_2; \cdots)$, ¥, X_m : → S.

- 令

$$\mathbb{X} = S^{\mathbb{Z}_+} = \{x = (x_0; x_1; x_2; \cdots) : x_n \in S; \forall n \geqslant 0\};$$

$$\mathscr{S} = (\{\{x : x_n = i\} : n \in \mathbb{Z} ; i \in S\}).$$

- 则, X 可n解为 Š$\mathbb{X}$ 随Å元, 即随Å .
- 5: 仅I交代 Ü有限维é 分Ù列.

$$P(X_0 = i_0; X_1 = i_1; \cdots; X_n = i_n); \quad n \geqslant 0; i_0; i_1; \cdots; i_n \in S:$$

连续时间参数、离散G态空间 随机过程.

- 设(; $\mathscr{F}$; P) 为概率模 . , S 为可数集.
- ë Y时间ë数 $T = \mathbb{R} \quad = [0; \infty)$.
- 一x随机变量: $\mathbf{X} = \{X_t; t \geqslant 0\}$, ¥ $X_t : \quad \to S$, $\forall t \geqslant 0$.
- 使 所有X_t 均可ÿ • 代数:

$$(\mathbf{X}) := \quad (\{\{X_t = i\} : t \geqslant 0; i \in S\}) :$$

- $\mathbf{X}$ Š于 空间

$$\mathbb{X} = S^T := \{\mathbf{x} = \{x_t; t \geqslant 0\} : x_t \in S; \forall t\}:$$

- $\mathscr{S} = \quad (\{\{\mathbf{x} : x_t = i\} : t \geqslant 0; i \in S\})$, 则$\mathbf{X}$ 可n解为 Š$\mathbb{X}$ 随Å元, 即随Å .
- E , 仅I交代 Ü有限维é 分Ù.

$$\mathscr{E} = \bigcup_{n \quad 1}^{8} \bigcup_{t_1, \quad , t_n ¥ 0} \quad (X_{t_1}; \cdots; X_{t_n}):$$

连续时间参数、连续G态空间 随机过程.

- 设(; $\mathscr{F}$; P) 为概率模 . , ë Y时间 ë 数 $T = \mathbb{R}$ $= [0; \infty)$.
- 一 x Š 于$\mathbb{R}$ 随 Å C þ: $\mathbf{X} = \{X_t : t \geqslant 0\}$.
- $(X_{t_1}; \cdots ; X_{t_n})$ 均为 ë Y . 随 Å 向 þ, $\forall n \geqslant 1$, $t_1 < \cdots < t_n$.

  5: 允 N $X_0 \equiv x_0$.
- 使 所有 X_t 均可 ÿ • 代数:

$$(\mathbf{X}) := \quad (\{\{X_t \leqslant x\} : t \geqslant 0; x \in \mathbb{R}\}) :$$

- $\mathbf{X}$ Š 于 空间

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}^T := \{\mathbf{x} = \{x_t; t \geqslant 0\} : x_t \in \mathbb{R}; \forall t\}:$$

- $\mathscr{S} = \quad (\{\{\mathbf{x} : x_t \leqslant x\} : t \geqslant 0; x \in \mathbb{R}\})$, 则$\mathbf{X}$ 可 n 解为 Š $\mathbb{X}$ 随 Å 元, 即随 Å .

- E，仅 I 交代 Ü 有限维 é 分 Ù.

$$\mathscr{E} = \bigcup_{n\ 1}^{8} \bigcup_{t_1, \quad ,t_n ¥0} (X_{t_1}; \cdots ; X_{t_n}):$$

- 价 ，交代 Ü 有限维 é .
- 5：a 似 ，以 þ l Ñ 时间 ë 数 ½ ë Y 时间 ë 数均可 负半 ¶，均可 区间 .

~. $T = \mathbb{Z}$, $\{0; 1; \cdots ; N\}$, $\{N_1; \cdots ; N_2\}$;

½，$T = \mathbb{R}$, $[0; T]$, $[T_1; T_2]$.

立性.

- 事件 á 5.
- 随 Å C þ á 5: $\forall A_1; \cdots; A_n$,

$$P(X_1 \in A_1; \cdots; X_n \forall$$

设以下随Å c þ　　Š 于可数集S, ½ 者　　Š 于$\mathbb{R}$.

- 设$\mathbf{X} = \{X_\alpha :\quad \in I\}$ 与$\mathbf{Y} = \{Y_\beta :\quad \in J\}$ 是ü x 随Å c þ .
- e ? 意$(X_{\alpha_1}; \cdots ; X_{\alpha_n})$ 与 ? 意$(Y_{\beta_1}; \cdots ; Y_{\beta_m})$ 相 p　　á , 则称$\mathbf{X}$ 与$\mathbf{Y}$ 相 p　　á .
- 原因: 令

$$\mathscr{E}_{\mathbf{X}} := \bigcup_{n \quad 1}^{8} \bigcup_{\alpha_1, \quad ,\alpha_n \mathrm{P} I} \quad (X_{\alpha_1}; \cdots ; X_{\alpha_n});$$

$$\mathscr{E}_{\mathbf{Y}} := \bigcup_{m \quad 1}^{8} \bigcup_{\beta_1, \quad ,\beta_m \mathrm{P} I} \quad (Y_{\beta_1}; \cdots ; Y_{\beta_m}):$$

则它　　满 v 交运算封 4 .

- 题: 因此, $\mathscr{E}_{\mathbf{X}}$ 与$\mathscr{E}_{\mathbf{Y}}$　　á 蕴　X　$(\mathscr{E}_{\mathbf{X}})$ 与　$(\mathscr{E}_{\mathbf{Y}})$　　á .
- a 似　可　义$\mathbf{X}^{\mathrm{p}1\mathrm{q}}; \ldots ; \mathbf{X}^{\mathrm{p}n\mathrm{q}}$　　á ,
$\mathbf{X}^{\mathrm{p}1\mathrm{q}}; \mathbf{X}^{\mathrm{p}2\mathrm{q}}; \cdots$　　á , ½　á 同分 Ù .

- 键　事件: $A_n = \{|X_n - X| > "\}$.
  $X_n \xrightarrow{P} X$ i　$P(A_n) \to 0$;
  $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ i　$P\left(\bigcup_{n ¥ N} A_n\right) \to 0$.
- Borel-Cantelli引 n:　e $\sum_n^8 {}_1 P(A_n) < \infty$, 则$P\left(A_n \text{ i:o:}\right) = 0$,

$$\{A_n \text{ i:o:}\} = \bigcap_{N \quad 1}^{8} \bigcup_{n \quad N}^{8} A_n:$$

- 推论:　e $\sum_n^8 {}_1 P(|X_n - X| > ") < \infty, \forall " > 0$, 则$X_n \xrightarrow{a.s.} X$.
- 推论: 设 $_1; \ _2; \cdots$ i.i.d. 且　望存在. 则 $_n/n \xrightarrow{a.s.} 0$.
- 强大数　律/SLLN: 设$X_1; X_2; \cdots$ i.i.d.且　望有意义.
  则$(X_1 + \cdots + X_n)/n \xrightarrow{a.s.} EX_1$.

- 有界收ñ　n, BCT:

  设$X_n \xrightarrow{P} X$. e $\exists M$ 使　$|X_n| \leqslant M, \forall n \geqslant 1$, 则$EX_n \to EX$.

- 单　收ñ　n, MCT, Levi　n:

  设X_n非负且单　þ升　X, 则$EX_n \to EX$.

- Lebesgue 控›收ñ　n, DCT:

  设$X_n \xrightarrow{a.s.} X$. e $|X_n| \leqslant Y, \forall n$ 且$E|Y| < \infty$, 则$EX_n \to EX$.

- Fubini　n(l Ñ时间ë数版　):

  设½者X_n　非负, ½者$\sum_{n\ \ 1}^{8} E|X_n| < \infty$,

  则$E\sum_{n\ \ 1}^{8} X_n = \sum_{n\ \ 1}^{8} EX_n$.

- Fubini　n(ë Y时间ë数版　):

  设½者X_t　非负, ½者$\int_0^8 E|X_t|dt < \infty$,

  则$E\int_0^8 X_t dt = \int_0^8 EX_t dt$.

- 条件概率: 设$P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在A 发生 条件下, 事件B (条件)概率.

- 5: • 要见 在A 发生 条件下 , 已•A , 假设A ƒ a , 则 谈及 概率 • æ用P_A 进 1 计算.
- ~ (l Ñ .). A 成 á 时, X 分Ù列为$\{P_A(X = i); i \in S\}$.
- ~ (l Ñ .). e A (发生), 则X 与Y á •:

$$P_A(X = i; Y = j) = P_A(X = i)P_A(Y = j); \quad \forall i; j:$$

而 Ø 是$P(X = i; Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$, $\forall i; j$.

- 条件分Ù: 条件分Ù列 条件 .
- 条件 望$E(X|Y)$:
  1. j, 用在$\{Y = j\}$ 条件下, X 条件分Ù列/条件求X 望, $'(j) := E(X|Y = j)$.
  2. 令$E(X|Y) := '(Y)$.
- 5: 条件 望$E(X|Y)$ 是随Å C þ.
- - 望公式: $EX = EE(X|Y)$.