第三章、随机变þ的数字特

- ©布的完 刻画:
  l散 . 的©布列(PMF)、
  ëY . 的密度 数(PDF)、
  一般a . 的©布 数(CDF).
- 实际问题 , 难以完 刻画/描述/确定©布.
- 数字特 容易计算, 是ï Ä工ä. 如,
  - %位 特 (期望);
  - ©散程度特 (•差).

§3.1 l散．随机变þ的数Æ期望

~. 设某 彩票u 1 了10万张, 每张售1元, 其 10张有奖, 各奖y 5000元, 其它无奖. 问: 买一张彩票, 平þ盈|多少

- 将“盈|”视为随机变þ, 记为X. 则X 可取 5000 1 或 1. 对应的概率为$\frac{10}{100000}$ 1 $\frac{10}{100000}$, (空间百©比).
- 平þ盈|为

$$EX \quad 4999 \quad \frac{10}{100000} \quad 1 \quad \text{p}1 \quad \frac{10}{100000}\text{q} \quad 0{:}5(\text{元}){:}$$

- 注: “计算4999 与 1 的算术平þ, 得2499 元”是荒谬的.
- 注: 期望是可能 的加权平þ.

~． ˜ 射 5 â 子求平 þ â 子数.
数 â 如右表所示:

- $\hat{p}_k$ 取k 的频率/(时间)百 © 比.
- 泊松 © 布列:

  p_k, k 0; 1; 2;

- 平 þ â 子数:

$$\frac{1}{2608}\text{þ}0 \quad 57 \quad 1 \quad 203$$

$$2 \quad 383 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{10 \quad 16}\text{q}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\hat{p}_k \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kp_k.$$

- 注: 期望 数 â 的算术平 þ .

X	频数	频率	p_k
0	57	0.022	0.021
1	203	0.078	0.081
2	383	0.147	0.156
3	525	0.201	0.202
4	532	0.204	0.195
5	408	0.156	0.151
6	273	0.105	0.097
7	139	0.053	0.054
8	45	0.017	0.026
9	27	0.010	0.011
¥ 10	16	0.006	0.007
总计	2608	1.000	1.000

- © 布特 最 要的特 一: %位 特 (期望).
- ~. 一批数 â $a_1; a_2; \ldots; a_n$ 的平 þ :

$$\bar{a} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

统计频数/频率: 可能 x_k出现n_k g, 频率为$\frac{n_k}{n}$. 于是

$$\bar{a} \quad \frac{1}{n} \sum_{k} x_k n_k \quad \sum_{k} x_k \frac{n_k}{n} \quad \sum_{k} x_k p_k.$$

- 定义1.1. 设X 为 l 散 . 随机变 þ , 概率 © 布如下:

$$P \mathrm{p} X \quad x_k \mathrm{q} \quad p_k; \quad k \quad 1; 2; \ldots$$

称 $\sum_k x_k p_k$ 为X 的(数学) 望或 值, 记为EX 或$E\mathrm{p}X\mathrm{q}$.

- 注: 也称为该©布的期望/þ .
- 注: 假设级数 ý 对收 ñ . Ä 则期望不 • 在.

点分布B$p1;pq$ 的 望

- X 的©布:

X	1	0
概率	p	1 p

.

- X 的期望:

$$EX \quad 1 \quad p \quad 0 \quad p1 \quad pq \quad p:$$

二项分布B(n, p)的 望

- X 的©布：记$q = 1 - p$，则

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

- X 的期望：

$$EX = \sum_{k=0}^{n} k \, C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \qquad (k' = k - 1)$$

$$= np \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{n'!}{k'!(n'-k')!} p^{k'} q^{n'-k'} = np, \qquad (n' = n - 1).$$

泊松分布Poissonp q 的 望

- X 的©布:

$$P\mathrm{p}X \quad k\mathrm{q} \quad \frac{k}{k!}e^{-\lambda}; \quad k \quad 0;1;2;:::$$

- X 的期望:

$$EX \quad \sum_{k=0}^{\infty} k \quad \frac{k}{k!}e^{-\lambda} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\mathrm{p}k \quad 1\mathrm{q}!}e^{-\lambda} \quad \mathrm{p}k' \quad k \quad 1\mathrm{q}$$

$$\sum_{k'=0}^{\infty} \frac{k'}{k'!}e^{-\lambda} \quad :$$

- 注: k p_k p_{k-1}, k $1;2;$

超几何分布(参数为$N;M;n$)的 望

- X 的©布:

$$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\quad m=0,1,2,\ldots,n.$$

- X 的期望：记$x'=x-1$. 则

$$EX=\sum_{m=0}^{n} m\,\frac{M!}{m!(M-m)!}\,\frac{C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{M!}{m'!(M-m)!}\,\frac{C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}=\sum_{m=1}^{n}\frac{M\cdot M'!}{m'!(M'-m')!}\,\frac{C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

$$=M\sum_{m'=0}^{n'}C_{M'}^{m'}\,\frac{C_{N'-M'}^{n'-m'}}{C_N^n}=M\,\frac{C_{N'}^{n'}}{C_N^n}\sum_{m'=0}^{n'}C_{M'}^{m'}\,\frac{C_{N'-M'}^{n'-m'}}{C_{N'}^{n'}}$$

$$=M\,\frac{N'!}{n'!(N'-n')!}\,\frac{n!(N-n)!}{N!}=\frac{Mn}{N}=n\,\frac{M}{N}.$$

- 定 机þ

指数分布E( ) 的 望

- X 的密度:

$$p(x)\begin{cases} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

- X 的期望:

$$EX \quad \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad \int_0^{\infty} x \; e^{-\lambda x} dx$$

$$\frac{1}{\;} \int_0^{\infty} t e^{-t} dt \quad (令 t \quad x)$$

$$\frac{1}{\;} \; (\; t e^{-t}) \Big|_0^{\infty} \quad \int_0^{\infty} e^{-t} dt \quad \frac{1}{\;}.$$

正态分布Np ; ^{2}q 的 望

- X 的密度:

$$ppxq \quad ?\frac{1}{\overline{2}} \exp " \frac{px \qquad q^2}{2 \quad ^2} * :$$

- X 的期望:

$$EX \quad »_{-\infty}^{\infty} xppxqdx$$

$$»_{-\infty}^{\infty} x \quad ?\frac{1}{\overline{2}} \exp " \frac{px \qquad q^2}{2 \quad ^2} * dx$$

$$»_{-\infty}^{\infty} \color{red}{p \qquad yq} \quad \color{blue}{?\frac{1}{\overline{2}} \exp " \frac{y^2}{2} *} \; dy \qquad py \quad \frac{x}{\qquad} q$$

$$»_{-\infty}^{\infty} \color{blue}{pyq}dy \qquad »_{-\infty}^{\infty} \color{red}{y} \; \color{blue}{pyq}dy \qquad :$$

- 注: 是权 的对称 %.

伽玛分布$\Gamma(\alpha, \beta)$的 望

- X 的密度:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

- X 的期望:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-\beta x} dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha'-1} e^{-\beta x} dx \quad (\alpha' = \alpha + 1)$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha')}{\beta^{\alpha'}} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

§3.3 期望的简ü 5 及随机变þ 数的期望公式

- 设 X 为随机变þ, $c; k; b$ 为常数. 则

$$
\begin{aligned}
&\text{p1q } E\text{pcq} \quad c;\\
&\text{p2q } E\text{p}kX\text{q} \quad kE\text{p}X\text{q};\\
&\text{p3q } E\text{p}X \quad b\text{q} \quad E\text{p}X\text{q} \quad b;\\
&\text{p4q 线5：} E\text{p}kX \quad b\text{q} \quad kE\text{p}X\text{q} \quad b:
\end{aligned}
\qquad (3.1)
$$

- ：(1) PpX cq 1. 按定义 (1) 成á.
  由(2), (3) (4) 成á.

(2) $EpkXq$ $kEpXq$ 的 明:

- 若k 0, 则 ü 边 þ 为0, ✓. 下设k 0.
- l散．: 设X 的©布为PpX x_iq p_i, i 1;2;:::.

  则Y kX 的©布为PpY kx_iq p_i, i 1;2;:::

  按定义, $EpYq$ $_i \, kx_i \; p_i$ k $_i \, x_i p_i$ $kEpXq$.
- ë Y ．: 设X 的密度为$ppxq$,

  则Y kX 的密度为$p_Y pyq$ $\frac{1}{|k|} p$ $\frac{y}{k}$. (参见第 章, ~4.8).

  按定义

$$EpYq \quad \text{»}^{\infty}_{-\infty} \; y \; p_Y pyq dy \quad \frac{1}{|k|} \text{»}^{\infty}_{-\infty} \; y \; p \; \frac{y}{k} \; dy$$

$$k \; \text{»}^{\infty}_{-\infty} \; x \; ppxq dx \quad kEpXq: \quad px \quad \frac{y}{k}q:$$

(3) $E p X \quad bq \quad E p X q \quad b$ 的 明:

- l散5与(2) a似. 下设X 为ë Y ., 密度为$ppxq$.
- $p_Y pyq \quad ppy \quad bq$. (参见第 章, ~4.8)

按定义,

$$E p Y q \quad \text{»}_{-\infty}^{\infty} y \quad p_Y pyq dy \quad \text{»}_{-\infty}^{\infty} y \quad ppy \quad bq dy$$

$$\text{»}_{-\infty}^{\infty} px \quad bq ppxq dx \quad px \quad y \quad bq$$

$$\text{»}_{-\infty}^{\infty} x ppxq dx \quad b \text{»}_{-\infty}^{\infty} ppxq dx \quad E p X q \quad b:$$

- ǐ散．：设X 的©布列为$PpX\ \ x_iq\ \ p_i,\ i\ \ 1;2;:::.$ 若下式右边ý对收ñ，则

$$EfpXq\ \ \overset{¸}{\underset{i}{}}\ fpx_iqp_i: \tag{3.3}$$

- ë Y．：设X 的密度为$ppxq$. 若下式右边ý对收ñ，则

$$EfpXq\ \ \overset{»\ \infty}{\underset{-\infty}{}}\ fpxqppxqdx: \tag{3.2}$$

- 注：免去了求$Y\ \ fpXq$ 的©布列或密度的　程.
- 注：Î　约定．~EX^k 表示EpX^kq, 不表示$pEXq^k$.

~3.2 X Ur0; 2 s, 求$E\sin X$.

-) :

$$E\sin X \quad » _{-\infty}^{\infty} \sin pxq \; p_X pxq dx$$
$$» _{0}^{2\pi} \sin pxq \; \frac{1}{2} dx \quad 0:$$

- 注: 上, 由对称 5 $E\sin X$ 0.

- © 布特 最 要的特 : © 散程度/宽窄特 (• 差).
- ~. 甲、乙 ü 个女生 唱队的身高如下, 平 þ 都是1.60.

  甲队: 1.60, 1.62, 1.59, 1.60, 1.59; 齐/ • 差 .

  乙队: 1.80, 1.60, 1.50, 1.50, 1.60. 参差不齐/ • 差 Œ.
- ~. 一批数 â $a_1; a_2; \cdots; a_n$ 的波动程度.

  如, 产品的某 特 5 (如强度)波动 Œ, 说明生产不稳定.

  如, 生物的某 特 5 (如 É ø)波动 Œ, 表示病态.
- 一批数 â 的 © 散程度/波动程度:

$$\frac{1}{n \quad 1} \; \text{þ}a_1 \quad \bar{a}\text{q}^2 \quad \text{þ}a_2 \quad \bar{a}\text{q}^2 \qquad \text{þ}a_n \quad \bar{a}\text{q}^2 \; : \qquad (4.1)$$

- 数 â 5 自随机变 þ X, 则 $\bar{a}$ EX $\triangle$.

  上式约为 Y þX q^2 对应的数 â 的平 þ , EY.

- 定义: 设EX • 在, 称

$$E\ \ X\quad EX\ ^{2} \qquad (4.3)$$

为X 的方差, 记为DpXq 或Varp$X$q. 也称为其©布的 • 差.

- 定义4.1(l 散 .) & 4.2(ë Y .)

设X 的©布列如下, 或密度为ppxq.

$$P\text{p}X\quad x_k\text{q}\quad p_k;\ k\quad 1;2;:::$$

则DpXq 有如下表 ˆ 式:

$$\text{¸}_{k}\quad x_k\quad EX\ ^{2}p_k;\qquad \text{»}_{-\infty}^{\infty}\quad x\quad EX\ ^{2}p\text{p}x\text{q}dx \qquad (4.2,\ 4.2')$$

- 注: 若级数/积©收 ñ , 则 • 差 • 在; Ä 则 • 差 u 散.
- • 差是 š 负的: DpXq ¥ 0.

- • 差的 等式/计算公式:

$$DpXq \quad EX^2 \quad EX \ ^2: \tag{4.4}$$

- I 要用第四章的定 n: $EpX \quad Yq \quad EpXq \quad EpYq$.
- (4.4) 的 明: 记 EX.

$$\begin{aligned} DpXq \quad & E \ X \quad ^2 \quad EpX^2 \quad 2 \quad X \quad ^2q \\ & EX^2 \quad 2 \quad EX \quad ^2 \quad EX^2 \quad ^2: \end{aligned}$$

- 另 : p 如 X 2 pX 2 pxq, 记 2 2q X EX. 则

$DpXq$

X

点分布$Bp1;pq$ 的方差

- X 的期望: $EX \quad p.$
- X 的 • 差: 按定义,

$$DpXq \quad EpX \quad pq^2 \quad p1 \quad pq^2 \; p \quad p^2 \; p1 \quad pq \quad pp1 \quad pq:$$

- X 的 • 差: 按计算公式,

$$EX^2 \quad 1^2 \; p \quad 0^2 \; p1 \quad pq \quad p$$

$$ñ \; DpXq \quad EX^2 \quad pEXq^2 \quad p \quad p^2 \quad pp1 \quad pq:$$

二项分布$B(n,p)$的方差

- X 的期望：$EX = np$.
- X 的•差：按定义，
- X 的•差：记$q = 1 - p$，按计算公式，

$$EX^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [k(k-1) + k] \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k'=0}^{n'} \frac{n'!}{k'!(n'-k')!} p^{k'} q^{n'-k'} + EX \quad (n' = n - 2)$$

$$= n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np$$

$$\Rightarrow D(X) = EX^2 - (EX)^2 = np(1-p) = npq.$$

泊松分布Poissonp q 的方差

- X 的期望: EX .
- X 的 • 差: k' k 1, k'' k 2, 按计算公式,

$$EX^2 \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \quad \frac{k}{k!} e^{-\lambda} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \quad \frac{k}{\mathrm{p}k \quad 1\mathrm{q}!} e^{-\lambda}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{p}k \quad 1\mathrm{q} \quad 1 \quad \frac{k}{\mathrm{p}k \quad 1\mathrm{q}!} e^{-\lambda}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\mathrm{p}k \quad 2\mathrm{q}!} e^{-\lambda} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\mathrm{p}k \quad 1\mathrm{q}!} e^{-\lambda}$$

$$2 \quad \sum_{k''=0}^{\infty} \frac{k''}{k''!} e^{-\lambda} \quad \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{k'}{k'!} e^{-\lambda} \quad 2$$

$$\tilde{n} \quad D\mathrm{p}X\mathrm{q} \quad EX^2 \quad \mathrm{p}EX\mathrm{q}^2 \quad :$$

匀分布Ura; bs的方差

- X 的期望：$EX \quad \frac{a+b}{2}.$
- X 的•差：按计算公式，

$$EX^2 \quad » _a^b x^2 \frac{1}{b \quad a}dx \quad \frac{1}{b \quad a}\frac{x^3}{3}\Big|_a^b \quad \frac{1}{3}pa^2 \quad ab \quad b^2q$$

$$ñ \quad DpXq \quad EX^2 \quad pEXq^2$$

$$\frac{1}{3}pa^2 \quad ab \quad b^2q \quad \frac{1}{4}pa^2 \quad 2ab \quad b^2q \quad \frac{1}{12}pb \quad aq^2:$$

- X 的•差：按定义，

$$DpXq \quad EpX \quad EXq^2 \quad »_a^b pX \quad \frac{a \quad b}{2}q^2 \frac{1}{b \quad a}dx$$

$$\frac{1}{b \quad a}\frac{pX \quad \frac{a+b}{2}q^3}{3}\Big|_a^b \quad \frac{1}{3pb \quad aq}2p\frac{b \quad a}{2}q^3 \quad \frac{1}{12}pb \quad aq^2:$$

指数分布Exp( ) 的方差

- X 的期望: $EX \quad \frac{1}{\lambda}$.
- X 的 • 差: 按计算公式,

$$EX^2 \quad \int_0^\infty x^2 \quad e^{-\lambda x}dx \quad \frac{1}{{}^2}\int_0^\infty t^2e^{-t}dt \quad (t \quad x)$$

$$\frac{1}{{}^2}\Gamma(3) \quad \frac{1}{{}^2} \quad 2! \quad \frac{2}{{}^2}$$

$$\tilde{n} \quad D(X) \quad EX^2 \quad (EX)^2 \quad \frac{1}{{}^2}.$$

正态分布Np ； ²q 的方差

- X 的期望: EX .
- X 的 • 差: 按定义,

$$DpXq \quad EpX \qquad q^{2}$$

$$»_{-\infty}^{\infty} px \qquad q^{2} \;\; ?\frac{1}{\overline{2}} \exp \;\; " \;\; \frac{1}{2}\frac{px \qquad q^{2}}{2} \;\; * \;\; dx$$

$$»_{-\infty}^{\infty} {}^{2} \;\; t^{2} \;\; ?\frac{1}{\overline{2}} e^{-\frac{1}{2}t^{2}} dt \qquad p令t \quad \frac{X}{\qquad} q$$

$${}^{2}: \qquad (见 \sim 3.1)$$

- 注: ü 个参数 ； ^{2} © 别是期望 • 差.

伽玛分布Γp ; q 的方差

- X 的密度: 定 ,

$$p_{\alpha}pxq \quad \frac{\alpha}{\Gamma p \quad q} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}; \quad px \text{ ¡ } 0q.$$

- X 的期望: $EX \quad \frac{\alpha}{\beta}$.
- X 的 • 差: ′ 2, 按计算公式,

$$EX^2 \quad \text{»}_0^{\infty} x^2 \frac{\alpha}{\Gamma p \quad q} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$$

$$\frac{\alpha}{\Gamma p \quad q} \quad \frac{\Gamma p \quad 'q}{\alpha'} \text{»}_0^{\infty} \frac{\alpha'}{\Gamma p \quad 'q} x^{\alpha'-1} e^{-\beta x} dx$$

$$\frac{\Gamma p \qquad 2q}{{}^2\Gamma p \quad q} \quad \frac{p \qquad 1q}{2}$$

$$\text{ñ} \quad DpXq \quad \frac{p \qquad 1q}{2} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{}{2}.$$

• 差的简 ü 5

- 设X 为随机变 þ , $c; k; b$ 为常数. 则

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{p1q} \quad D\mathrm{pcq} \qquad 0; \\
&\mathrm{p2q} \quad D\mathrm{p}kX\mathrm{q} \qquad k^2 D\mathrm{p}X\mathrm{q}; \\
&\mathrm{p3q} \quad D\mathrm{p}X \qquad b\mathrm{q} \qquad D\mathrm{p}X\mathrm{q}; \\
&\mathrm{p4q} \quad D\mathrm{p}kX \qquad b\mathrm{q} \qquad k^2 D\mathrm{p}X\mathrm{q}:
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

- : (1) $E\mathrm{pcq} \qquad c$. 按定义, $D\mathrm{p}X\mathrm{q} \qquad E\mathrm{pc} \qquad c\mathrm{q}^2 \qquad 0$.
  由(2), (3) (4) 成 á .

(2) $DpkX$q k^2DpXq 的 明:

- 按计算公式,

$$EpkX\text{q} \quad kEpX\text{q}; \quad Er pkX\text{q}^2 s \quad Epk^2X^2\text{q} \quad k^2EX^2$$

$$\text{ñ} \quad DpkX\text{q} \quad k^2EX^2 \quad pkEX\text{q}^2$$

$$k^2 \quad EX^2 \quad pEX\text{q}^2\text{q} \quad k^2DpX\text{q}:$$

(3) DpX bq DpXq 的 明:

- 按定义,

$$EpX \quad b\text{q} \quad EpX\text{q} \quad b$$

$$\text{ñ} \quad DpX \quad b\text{q} \quad E \quad pX \quad b\text{q} \quad EpX \quad b\text{q} \quad ^2$$

$$EpX \quad EX\text{q}^2 \quad DpX\text{q}:$$

§3.5 其它

定n 5.1 设 EX 与 ^{2} $DpXq$ •在. 则对任意" ¡ 0,

$$P\,p|X \quad | ¥ "q ¤ \frac{2}{"2}: \qquad (5.1)$$

- ë Y . 情/的 明:

$$DpXq \quad » _{-\infty}^{\infty} x \quad q^2 ppxqdx ¥ » _{x\leqslant\mu-\varepsilon\text{或}x\geqslant\mu+\varepsilon} x \quad q^2 ppxqdx$$

$$¥ » _{-\infty}^{\mu-\varepsilon} "^2 ppxqdx \quad » _{\mu+\varepsilon}^{\infty} "^2 ppxqdx$$

$$¥ "^2 » _{-\infty}^{\mu-\varepsilon} ppxqdx \quad » _{\mu+\varepsilon}^{\infty} ppxqdx$$

$$"^2 P\,pX ¤ \quad "\text{或}X ¥ \quad "q \quad "^2 P\,p|X \quad | ¥ "q:$$

- 注: ‡映了X ©布的权 的©散程度.

定 n 5.1 设 EX 与 ² DpXq • 在. 则对任意" ¡ 0,

P p|X | ¥ "q ¤ ²⁄"²: (5.1)

- 称 a DpXq 为 X 的标准差.
- 取" k , 则

  P p|X | ¥ k q ¤ 1⁄k²:

- 特别地, 取 k 3, 则推出

  P p|X | ¥ 3 q ¤ 1⁄9:

- 注: 态©布的 ² 验 则 P p|X | ¥ 3 q ¤ 0:0027. (§2.3)

- ©别称EX^k, $E(X-EX)^k$为X的k 原点 ，中心 ，©别记为 $_k$, $_k$, (k 1;2;:::).
- 注: þ 为 $_1$, • 差为 $_2$.
- 注: k 也可以不是 数.

- 设X 的©布 数$F(\cdot): x \mapsto p = F(x)$ ë Y且î格ü调上升. 则•在‡ 数$p \mapsto x = x_p$, $p \in (0,1)$, 即•在唯一的x_p 使得

$$F(x_p) = p, \quad \forall p \in (0,1).$$

- 称x_p 为X 的p **分位数**. 称$p \mapsto x_p$ 为X 的**分位数函数**.
- 一般情/. 若下式成á, 则称x_p 是X 的p **分位数**(下©位点).

$$P(X < x_p) \le p \le P(X \le x_p). \qquad (5.4)$$

等价地; $P(X \le x_p) \ge p$, $P(X \ge x_p) \ge 1 - p$. (5.4')

- 令$p = \frac{1}{2}$. 称$x_{\frac{1}{2}}$ 为**中位数**.
- 注: ©位数•在(如, $x_p = \inf\{x : F(X) \ge p\}$), 但不一定唯一.

~. ü 点©布Bp1; p_0q 的©位数.

- 记q_0 1 p_0. ©布 数:

$$F\text{pxq} \begin{cases} 0; & x \quad 0; \\ q_0; & 0 \text{ ¤ } x \quad 1; \\ 1; & x \text{ ¥ } 1. \end{cases}$$

- ©位数:

$$x_p: \begin{cases} 0; & p \text{ P p0; } q_0\text{q}; \\ \text{r0; 1s}; & p \quad q_0; \\ 1; & p \text{ P p} q_0\text{; 1q}. \end{cases}$$