- 事　是否发生Ã法预知, 但是其可能性大小可±定量描述.
- 如, 抛硬币, “正面”和“反面”的可能性大小相同.
- 又如, 抛两枚硬币,

  “都是正面”和“都是背面”的可能性大小相同;

  “˜正˜反”的可能性比“都是正面”的可能性大.
- **随机事件的概率**: 定量描述§发生可能性大小.

  A 的　　　　• $P(A)$.
- 　: 频　、置信度、　理化定Â.

- ˜定条 (•条 S)大量重 实现时,
  事 A 发生的次数(•频数)与 试 次数之比:

$$A\ \text{发生的频率} = \frac{A\text{的频数}}{\text{试\quad 次数}}.$$

- 频 • 期 ² 积累¤得的, 趋于 - 定值p, 这是客观事实.
- 例. 抛硬币, “正面 上” 的频 趋于1/2. (P3表).
- 例. 100 球. 其中黑球50 , 白球50 . 任取˜ . 则 “取到黑球” 的频 趋于1/2. 若条 •黑球60 , 白球40 , 则 “取到黑球” 的频 趋于0:6.
- 定Â1.1. 上述 - 定值p • A (在条 S 下) 发生的 ,

  $$P(A) = p.$$

- 频　ä有-定性的事　•‘机事　,　事件.
  其频　的-定值　•该事件的概率.
- ：实　中遇到的事　˜般都是‘机事　.
- 频　取值于$[0;1]$. Ï此$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- 不可能事　V　的　：$P(V) = 0$;
  必

- 不能重　或不能大量重　的事　A, 如何定 Â 其　　?
- 人们　â ®有的知识和 ²　, 对A 发生可能性　　　人信念, 用$[0;1]$ 中的数q 来表示. 可能性大的事　A 对应　大的数q, (单调性).
- 定 Â 1.2.　上述　人信念q • 主观　　. 这是主观定 Â .
- 例. 企 ′　对　品　销可能性的预测;

  š 生对某特定病人手术　　的预测.
- 主观　　q: 对事　　　详细考　(与条　　S ¬ 合),　分利用®有 ²　(与频　¬ 合, 与 - 定值p c q).

§1.2 古典 型

- 某些¯题本身ä有“对 性”. 可直 Ž其 .
- 这是用数学模型求) 的方法.
- 如. 抛硬币, 认为“正面”和“反面” 相等(对 性), 故 • 0:5.
- : “正面”和“反面”的频 之和 • 1.

例2.1. 盒中5 球, 3白2黑. 从中任取 ˜ . ¯: 取到白球的 ?

- 直观看 • 3/5.
- 模: 把5 球编号, 1, 2, 3号 • 白球, 4, 5号 • 黑球.
- 分 Û : 取到每 球的 相同(对 性).

例2.2. 盒中5 球, 3白2黑. 从中任取两 . ¯: 都是白球的 ?

- : 这时不能直观得 .
- 模: 把5 球编号, 1 | 3号 • 白球, 4 | 5号 • 黑球.
- ¤有可能 (果有$C_5^2 = 10$: $1+2$ $1+3$ $1+4$ $1+5$ $2+3$ $2+4$ $2+5$ $3+4$ $3+5$ $4+5$.
- 每 (果发生的机会相同, 互 . 故每 (果的 • 1/10.
- 其中, $1+2; 1+3; 2+3$ 这3 (果 “都是白球”, 其 ¦ (果则不 . 故 ¤ 求 • 3/10.

- 定Â 2.1 设$A_1; A_2; \cdots; A_n$ • 事 , 若

  (1) $A_1; A_2; \cdots; A_n$ 发生的机会相同(等可能性),
  (: 源于对 性);

  (2) $A_1; A_2; \cdots; A_n$ 至少有 ˜ 发生(备性),
  (: ¤有可能 (果, 频 • 1);

  (3) $A_1; A_2; \cdots; A_n$ 至多有 ˜ 发生(互不相容性).
  (: 互相排 , 频 可 起来).

  则 $A_1; A_2; \cdots; A_n$ • **等概完备事件组/等概基本事件组.**

  每 A_i • **基本事件.**

- 如, 例1.1, 抛硬币, 两 基本事 : “正面” 和 “反面” .

- 若$A_1; A_2; \cdots; A_n$是ˆ 等 基本事 ，事 B由其中的m 基本事 ¤构 ，则

$$P(B) = \frac{m}{n}. \qquad (2.1)$$

- **古典概型**: 用等 基本事 和(2.1)来 Ž事 的 .
- ： 模, 不重不 地Ž n 与m.

例2.2(续). 5 球, 3白2黑. 从中任取两 . ¯: 都是白球的 ?

- 共有$n = C_5^2 = 10$ 种不同取法, 每种取法对应 ˜ 基本事 .
- 其中, “都是白球” 的基本事 有$m = C_3^2 = 3$.
- 故 ¤ 求 • $m/n = 3/10$.
- ø) : 三 基本事 : “两白”, “两黑”, “ ˜ 黑 ˜ 白”.
-) û : 模时 Ö 必 ¤ 有对象(, 球)编号并 ± 区分.

例2.3. 100 品，有5 次品. 任取50 . 求："Ã 次品" 的 .

- 共有$n = C_{100}^{50}$ (果，每 (果对应˜ 基本事 .
- 符合事 B = "Ã 次品" 的基本事 : 从95 正品中取 50 . 故$m = C_{95}^{50}$.
- 故¤ 求•

$$P(B) = \frac{C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}} = \frac{95!/(50!45!)}{100!/(50!50!)}$$

$$= \frac{50!/45!}{100!/95!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{47}{99} \cdot \frac{46}{97} = \frac{1081}{38412} \approx 2:8\%:$$

例2.4. 100 品，有5 次品. 任取50 .
$A =$ “恰好有2 次品”. 求: $P(A)$.

- $n = C_{100}^{50}$.
- 符合事 A 的基本事 : 从5 次品中任取2 ，从95 正品中任取48 . 故$m = C_5^2 C_{95}^{48}$.
- 故¤求•

$$P(A) = \frac{C_5^2 C_{95}^{48}}{C_{100}^{50}} = \frac{\frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{95!}{47!48!}}{\frac{100!}{50!50!}} \approx 0{:}32{:}$$

例2.5. 设 ˜ 批 品共N , 其中次品共M . 从中任取n . ¯ : 恰好 现m 次品的 ?

- 其中, $0 \leqslant m \leqslant n$, $m \leqslant M$, $n - m \leqslant N - M$.
- ¤ 求 •

$$P(\text{恰好 现}m\text{ 次品}) = \frac{C_{N-M}^{n-m} C_M^m}{C_N^n}. \tag{2.2}$$

- 当$k < 0$ 或$k > n$ 时, 约定$C_n^k = 0$.

定理2.1. 设有N 对象, 分 k 类, 其中第i 类有N_i .

其中, $N_i \geqslant 0$, $i = 1;2;:::;k$; 且$N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N$.

从这N 对象中任取n .

$$A = \text{“恰有}m_i \quad \text{属于第}i\text{ 类}, i = 1;\cdots;k\text{”}:$$

其中, $0 \leqslant m_i \leqslant N_i$, $i = 1;2;:::;k$; 且$n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.

则

$$P(A) = \frac{C_{N_1}^{m_1} C_{N_2}^{m_2} ::: C_{N_k}^{m_k}}{C_N^n}: \tag{2.3}$$

§1.3 事　的运 Ž　　　的　法　式 &

§1.4　合与事　、　　的　理化定 Â

- 定 Â 4.1.　合是若　不同的元 ƒ 的全体.
- 　合的符号: $A; B; C; \cdots$, 元 ƒ 的符号: $a; b; c; \cdots$.
- $a \in A$: 元 ƒ a 属于　合A;
  $a \notin A$: 元 ƒ a 不属于　合A.
- 空集, $\varnothing$: 不含任何元 ƒ .
- 例4.1. 全体正整数的　合, $\{1; 2; 3; \cdots\}$.
- 例4.2. 不大于10的正整数的　合, $\{1; 2; \cdots; 10\}$.
- 例4.5. 红、黄、白三　球, 有放回地　取三次的(¤ 有) (果　　的　合, 共有$3^3 = 27$　元 ƒ .

- 包含/包含于: A 的元 f 都是B 的元 f (, $a \in A \Longrightarrow a \in B$),
  • $A \subseteq B$ (• A 包含于B) 或$B \supseteq A$ (• B 包含A). •
  A 是B 的子集.
- 例4.3. $\mathbb{R}$: 实数 . $\mathbb{R}^2 = \{(x; y) : x; y \in \mathbb{R}\}$. 二 ʻ 单 圆,
  $A = \{(x; y) : x; y \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 < 1\}$ (开),
  $B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ (闭). 则$A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$.
- 相等: A 的元 f 与B 的元 f 全相同, $A = B$.
- $A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ 且$B \supseteq A$.

合的运Ž

- 并 , $A \cup B$: ¤有“属于A 或属于B ”的元 f .
- , $A \cap B$, AB: ¤有“属于A 且属于B”的元 f .
- 若只讨 某非空 合 的 之 的关系, 则 • 全集.
  A 的余 / 补 : $A^c = \{x \in \ : x \notin A\}$. : $(A^c)^c = A$.
- : $A \setminus B := A \cap B^c$. 例, $A^c = \ \setminus A$. (: ‘ 恩图).
- 换 : $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- (合 : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, 类 q .
- 分配 : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $\cap$ 与$\cup$ 可互换.
- 对偶 : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- $A \cup A = A$, $A \cup A^c = \ $, $A \cup \ = \ $, $A \cup \varnothing = A$.
  $A \cap A = A$, $A \cap A^c = \varnothing$, $A \cap \ = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

- (可)Ã 穷 合的并 和 . 设$A_1; A_2; \dots$ 是 ˜ 合.
- 并 , $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_1 \cup A_2 \cup \dots$:
  a 属于$A_1; A_2; \dots$ 中的至少 ˜ ; 存在 k 使得a 属于A_k.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k := \{a : \exists\ k \in \{1; 2; \dots\} \text{ 使得 } a \in A_k\}:$$

- : $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, $A_1 \cap A_2 \cap \dots$, $A_1 A_2 \dots$:
  a 属于¤有的 $A_1; A_2; \dots$; a 属于任¿ ˜ A_k.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k := \{a : a \in A_k; \forall\ k \in \{1; 2; \dots\}\}:$$

- 例, $\bigcup_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{k}; 1] = (0; 1]$, $\bigcap_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{k}; \frac{1}{k}) = \{0\}$.

事 与 合

- 条 S 下(，某 ‘ 机试 中) ¤ 有可能不同 (果的 合 (视 • 全). 事 则对应于 的 .
- 是必然事 ，$\varnothing$ 是不可能事 .
- $! \in A$: ($!$ 使得) A 发生.
- 事 的关系与运 Ž : 包含/包含于, 相等, 事 , 并事 , $\cdots$
- 对 事件/补事 , A^c, • • A. 含 Â : A 不发生.
- 差事件, $A \backslash B$. 含 Â : 事 A 发生但事 B 不发生.
- $A; B$ 互不相容/不相交/互斥: $A \cap B = \varnothing$.
  含 Â : 不能同时发生. (: $A \subseteq B^c$, $B \subseteq A^c$.)
- 多 事 互不相容: 两两互不相容. 例, 基本事 互不相容.

例4.6. 抛两枚硬币.

- A = “两　都是正面”, B = “恰好˜　正面”, C = “至少˜　正面”, D = “˜正˜反”.
- 则

$$A \subseteq C; \quad B = D \subseteq C; \quad \text{Ï 此 } AC = A; \quad BC = B;$$
$$A \cup B = C; \quad AB = \varnothing;$$

- 数学语言: 用H(Head) 表示正面, T(Tail)表示反面. 譬如, HT: 第˜枚硬币正面　上, 第二枚硬币反面　上. 则

$$= \{\text{HH, HT, TH, TT}\}; \quad A = \{\text{HH}\};$$
$$B = D = \{\text{HT, TH}\}; \quad C = \{\text{HT, TH, HH}\};$$

例3.2 ˜ 射手向某目标连续射击.

- A_1 = “第˜次射击, 命中”,
- A_k = “前$k-1$次射击都™中, 第k次射击命中”, 其中, $k = 2; 3; :::.$
- 则$A_1; A_2; :::$ 互不相容, 且$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ = “终于命中”.
- 数学语言: 用H(Head) 表示“命中”, T(Tail)表示“™中”. 譬如, HTH$\cdots$: 第˜次命中, 第二次™中, 第三次命中, $\cdots$

= ¤有Ã穷 的H-T 符串;

A_1 = ¤有形如H $* * *$ 的 符串;

A_2 = ¤有形如TH $* * *$ 的 符串; $\cdots$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \quad \backslash\{TT \cdots T \cdots\}:$$

- 频 的 - 定值是直观的/ ´ 受, 主观 不 ´ 被 受. 二者的数学严密性不 .
- 柯尔莫 夫(Kolmogorov A. N., 1903-1987), 1933年: 用 合 、测度 严 定Â , 需‡ 理化 设.
- 设 • ˜ 非空 合(全), • 基本事件空间/样本空间.
- 设$\mathscr{F}$ 是 的 ˜ 些 (事) 的 合. 若
  (1) $\in \mathscr{F}$;
  (2) 若$A \in \mathscr{F}$, 则$A^c =$ $\backslash A \in \mathscr{F}$;
  (3) 若$A_1; A_2; \cdots \in \mathscr{F}$, 则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$,

  则 $\mathscr{F}$ • 代数.
- $\mathscr{F}$ 中的元 f 是事 , 有限 或可 合的运 Ž 封闭.
- 例, 若 • 有限 或可数 , 则通 $\mathscr{F}$ = “ ¤ 有 ” .

- 设$P = P(\cdot)$ 是$\mathscr{F}$ 上的函数, 若

(1) $P(A) \geqslant 0; \forall A \in \mathscr{F};$ (4.17)

(2) $P(\ ) = 1;$ (4.18)

(3) 全可 性: 若$A_1; A_2; \cdots \in \mathscr{F};$ 且 § 们两两不相 , 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n): \qquad (4.19)$$

则 P • **概率测度**, **概率**.

- 有$\mathscr{F}; P$ 的 **概率空间**.
- : 全可 性/可 可 性, 由 ² /理性得 .
- : 有些情况下, Ã 法在 的 ¤ 有 上合理定 Â .
- : ± 下, ¤ 有的事 þ 设在$\mathscr{F}$ 中.

1 $P(\varnothing) = 0.$

2 有限可　性: 若$A_1; : : : ; A_n$ 两两不相　, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i): \qquad (4.20)$$

3 $P(A^c) = 1 - P(A).$　(　: 可利用$P(A^c)$　Ž /估 Ž $P(A)$).

4 若$A \subseteq B$, 则$P(A) \leqslant P(B)$ 且$P(B \backslash A) = P(B) - P(A).$

5　限事　的　　: 设$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n); \quad P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n):$$

例(若当 式).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB): \tag{3.6}$$

- 证: A 与$B \backslash A$ 互不相 , 且并 • $A \cup B$. 故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash A): \tag{3.7}$$

- 类q地, $P(B) = P(B \backslash A) + P(AB)$. $\star$ 代入上式 可.
- 若当 式: 对任¿$n \geqslant 2$, $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_k P(A_k) - \sum_{k<i} P(A_k A_i) + \sum_{k<i<j} P(A_k A_i A_j) + \cdots$.

例3.1. 袋中有红、黄、白球 ˜ . 每次任取 ˜ , 有放回地 取三次. A = “ 到的三 球中没有红球或没有黄球” . 求$P(A)$.

-) : G = “三 球都不是红球” , H = “三 球都不是黄球” . 则$A = G \cup H$. (: G 和H 不是互不相容).
- $P(G) = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$. 同理, $P(H) = \frac{8}{27}$.
- GH = “三 球都是白球” , 故$P(GH) = \frac{1^3}{3^3} = \frac{1}{27}$.
- â 若当 式, ¤ 求 •

$$P(G \cup H) = P(G) + P(H) - P(GH) = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}.$$

§1.5 条 、 法 式、独立性

- 在条 S下/在某‘机试 中, 事 B 的 • $P(B)$.
- 在条 S的基础上, 再 / 条 A.
- 讨 在 条 A之后, 事 B 的 , • $P(B|A)$.
- $P(B|A)$ • 条 .

例5.1. 16 球, 6 玻璃球(2红4蓝), 10 木球(3红7蓝). 从16 球中任取 ˜ .

	玻璃	木质	
红	2	3	5
蓝	4	7	11
	6	10	16

- A = “取到蓝球”,
  $P(A) = \frac{11}{16}$.
- B = “取到玻璃球”,
  $P(B) = \frac{6}{16}$.
- 现 ʻ 机取 ˜ 球, 看 是蓝球. ¯: 球是玻璃球的 ?
- 在 ® 知事 A 发生的(前提)条 下, 事 B 发生的 ,
  - $P(B|A)$.
- 古典 型的对 性,

$$P(B|A) = \frac{4}{11} = \frac{4/16}{11/16} = \frac{P(AB)}{P(A)} \approx \frac{AB\text{的频数}}{A\text{的频数}}.$$

- 古典 型: 设条 S 下, 有n 基本事 , A 由其中m , (B 由其中l), AB 由其中k . 则

$$P(B|A) = \frac{\text{在}A\text{发生的前提下}B\text{中包含的基本事 数}}{}$$

例5.2. 5 乒乓球, 3新2 Î . 每次取 ˜ , Ã 放回取两次.
A= "第 ˜ 次取到新球"; B = "第二次取到新球".
求: $P(A), P(B), P(B|A)$.

- 模: 把5 球编号, 1 | 3 • 新球, 4 | 5 • Î 球.
- $P(A) = \frac{3\cdot 4}{5\cdot 4} = \frac{3}{5}$, $P(AB) = \frac{3\cdot 2}{5\cdot 4} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}$. 故$P(B|A) = \frac{1}{2}$.
- 直观: 若A 发生, 则还剩2新2 Î (条 后, 生新的 ' 机 试). 于是第二次取到新球的 • $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$.
- $P(B)$: $(i;j)$ 表示第 ˜ 次取到i 号球, 第二次取到j 号球.
  $B = \{(i;j) : i \leqslant 5; j \leqslant 3; i \neq j\}$, 含$3 \times 4$ 基本事 .
  故$P(B) = \frac{3\cdot 4}{5\cdot 4} = \frac{3}{5}$.
- 签是 平的: $A = \{(i;j) : i \leqslant 3; j \leqslant 5; i \neq j\}$.

- 条 的定Â:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}: \qquad (5.1)$$

- 法 式: (5.1) 写•

$$P(AB) = P(A)P(B|A): \qquad (5.1')$$

- : ± 上两 式的应用.
  (5.1): ®知$P(A)$ 和$P(AB)$, 求$P(B|A)$.
  (5.1'): ®知$P(A)$ 和$P(B|A)$ (在新的‘机试 直 得到), 求$P(AB)$.

例5.3. 5　乒乓球, 3新2 Î , 每次取1　, 有放回取2次.

- A = “第 ˜ 次取到新球” .
  B = “第二次取到新球”
- 直观: B 的(条　)　　与A 是否发生 Ã 关.
- 数学表达:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B):$$

- 定Â5.2. 若下式 立, 则 $A;B$ (相互)独 .

$$P(AB) = P(A)P(B):$$

- 定Â中不‡求$P(A) > 0$ 或$P(B) > 0$.
- 在$P(A) > 0$ (或, $P(B) \neq 0$) 时, 独立等 于

$$P(B|A) = P(B); \quad (或;P(A|B) = P(A)):$$

, 条 等于Ã条 的原始 .

- 独立性的直观)释:

A 是否发生不影响B 的发生 ;

B 是否发生不影响A 的发生 .

定理5.1. 在 o 对事 $A; B;$ $A; B;$ $A; B;$ $A; B$ 中, 若有 ˜ 对相互独立, 则 三对 • 相互独立.

- , 这 o 对事 或者都相互独立, 或者都不相互独立.
- 证: $A; B$ 独立$\Longrightarrow A; B$, 这是 Ï •

$$P(AB) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B)$$
$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(B):$$

- 类 q 地, $A; B$ 独立.

  或, ? ˜ 步, $A; B$ 独立 / $B; A$ 独立$\Longrightarrow B; A$ 独立 / $A; B$ 独立.
- 再 ? ˜ 步, $A; B$ 独立$\Longrightarrow A; B$ 独立.
- 由$A = A^c$ 知, 命题 立.

例5.4. 、¯ 同时向 ˜ 敌机炮击. 击中 0.6; ¯ 击中 0.5.
求: 敌机被击中的 .

- ：独立性 • (默认且合理的) 设.
-)：A = " 击中", B = " ¯ 击中"; C = "敌机被击中".
- $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. (若当 式).
- $P(AB) = P(A) \times P(B) = 0{:}6 \times 0{:}5 = 0{:}3$,

  故$P(C) = 0{:}6 + 0{:}5 - 0{:}3 = 0{:}8$.
-)：$C = \overline{A \cup B} = A \cap B$, (对偶).

  故$P(C) = P(A \cap B) = P(A)P(B) = (1 - 0{:}6)(1 - 0{:}5) = 0{:}2$.

  从而$P(C) = 1 - P(C) = 0{:}8$.
- ：两种方法 "并事 " 的 化 • " 事 " 的 .

多 事 相互独立

- 定Â 5.3. 若 ± 下4 等式 þ 立, 则 $A; B; C$ 相互独 .

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A)P(B); \\
P(AC) &= P(A)P(C); \\
P(BC) &= P(B)P(C); \\
P(ABC) &= P(A)P(B)P(C).
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

- 定Â 5.4. 若对任 ¿ $2 \leqslant k \leqslant n$ 的整数k, ± 从$1; 2; \ldots; n$ 中任 ¿ 取 的k 不同的$i_1; i_2; \ldots; i_k$,

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}); \tag{5.4}$$

则 $A_1; A_2; \ldots; A_n$ (相互)独 .

- 必 ‡ 但非 分的 ‡ 求:

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

例5.5. 某型号 射炮单发击中敌机的 • 0.6. 若 门同时发射单发, 欲 ± 99% 击中敌机. ¯: 至少需 ‡ 多少门 射炮?

- : 独立性 • (默认且合理的) 设.
-) : 设需 ‡ n门, $A_i =$ "第i门 炮击中敌机" .
- $A =$ "敌机被击中" . $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. 则

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_n)$$
$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n) \qquad \text{(独立性)}$$
$$= 1 - (1 - 0.6)^n = 1 - 0.4^n.$$

- 目标是$1 - 0.4^n \geqslant 0.99$.

$$n \geqslant \frac{\ln 0.01}{\ln 0.4} \approx 5.026.$$

- Ï 此, 至少需 ‡ 6门 射炮.

例5.6(反例). þ 匀正 o 面体, o 面分别涂 (1)红色、(2)黄色、(3)蓝色、(4)红黄蓝混杂. 投掷 ˜ 次, 考 底面 现的颜色.

A = "红色 现", B = "黄色 现", C = "蓝色 现".

试分 Û $A; B; C$ 之 的独立性.

- 基本事 : A_i = "第i面在底面", $i = 1; 2; 3; 4$.
- $A = A_1 \cup A_4$, $B = A_2 \cup A_4$, $C = A_3 \cup A_4$.
- $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$.
- $AB = AC = BC = A_4$, $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{4}$.

  故, $A; B$; $A; C$; $B; C$ 这三对都是相互独立的.
- 若$A_1; \cdots; A_n$ 中的任 ¿ 两 相互独立, 则 § 们 独 .
- $ABC = A_4$, $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$.

  故, $A; B; C$ 不是相互独立的.
- : 本例中的$A; B; C$ 两两独立, 但不是相互独立的.

§1.6 全 式与逆 式

例6.1. 5 乒乓球, 3新2 Î . Ã 放回取两次.

求: 第二次取到新球的 .

- : 取是 平的(参 例5.2), ¤ 求 • $\frac{3}{5}$.
-) : A = “第 ˜ 次取到新球”, B = “第二次取到新球”.

$$B = BA \cup BA; \qquad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \text{故}; P(B) &= P(BA) + P(BA) \\ &= P(A)P(B|A) + P(A)P(B|A) \quad (\ \text{法} \quad \text{式}) \\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

- : (6.1) 杂的事 (情况)分) • 单的事 (情况).

定理6.1(全 式). 设$A_1;A_2;:::;A_n$

- 类q地,

$$P(A_1) = P(H_1 H_2^c H_3^c) + P(H_1^c H_2 H_3^c) + P(H_1^c H_2^c H_3)$$

$$= 0.4(1-0.5)(1-0.7) + *** * + * *** = 0.36.$$

$$P(A_2) = P(H_1^c H_2 H_3) + P(H_1 H_2^c H_3) + P(H_1 H_2 H_3^c)$$

$$= (1-0.4)0.5 \times 0.7 + * * * + *** * = 0.41.$$

$$P(A_3) = P(H_1 H_2 H_3) = 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14.$$

- ¤求•

$$P(B) = \sum_{i=0}^{3} P(A_i) P(B|A_i)$$

$$= 0.09 \times 0 + 0.36 \times 0.2 + 0.41 \times 0.6 + 0.14 \times 1 = 0.458.$$

例6.3(赌徒输光¯题). 设 有赌本M元, ¯有赌本N元. 每˜Û输赢•1元, 没有和Û. 每Û 胜 •p. 求: “ 输光” 的 .

- 其中, $M; N$ 是正整数, $0 < p < 1$.
-): $L = M + N$, 则$L \geqslant 2$.
- 若$L = 2$, $M = N = 1$, 则¤求•$1 - p$. 下设$L \geqslant 3$.
- 扩 ¯题: 若 、 ¯共有赌本L元, 有赌本i 元, ¯有赌本$L - i$元, 则 输光的 p_i 是多少? (原¯题¤求•p_M.)
- 固定L. i •模型参数, 始 设条 , $0 \leqslant i \leqslant L$.
- A_i = 在参数•i 的模型中 “ 后输光” 这˜事 .
  B = “ 赢 第˜Û” . (任¿参数i 的模型þ适用.)
- $p_i = P(A_i)$. $p_0 = 1$, $p_L = 0$, (边 . 条). 直观: $p_i \searrow$.

- 首步(首局)分析法:

  当$1 \leqslant i \leqslant L-1$ 时, 在参数 • i 的模型中, 由全　　式,

$$
\begin{aligned}
p_i =& P(B)P(A_i|B) + P(B)P(A_i|B) \\
=& p \cdot p_{i+1} + q \cdot p_{i-1}; \qquad (q = 1-p;) \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

边 . 条　: $p_0 = 1$, $p_L = 0$.

- p_i　写 • $p \cdot p_i + q \cdot p_i$. 推

$$
\begin{aligned}
p(p_i - p_{i+1}) =& q(p_{i-1} - p_i); \quad (\quad {}_i = p_i - p_{i+1};) \\
{}_i =& \frac{q}{p} \; {}_{i-1} = r^2 \; {}_{i-2} = \cdots = r^i \; {}_0; \quad (\quad r = \frac{q}{p};)
\end{aligned}
$$

$$
p_0 - p_{i+1} = \sum_{k=0}^{i} {}_k = \sum_{k=0}^{i} r^k \; {}_0; \qquad (6.4)
$$

- $p_0 - p_i = \sum_{k=0}^{i-1} r^k \ {}_0, \quad {}_i = p_i - p_{i+1},\ r = \frac{q}{p},\ q = 1 - p.$

  边．条　：$p_0 = 1$, $p_L = 0$.

- $p = \frac{1}{2}$:

$$p_0 - p_i = i \ {}_0 \Rightarrow p_0 - p_L = L \ {}_0 \Rightarrow \ {}_0 = \frac{1}{L} \Rightarrow p_i = 1 - \frac{i}{L}.$$

- $p \neq \frac{1}{2}$:

$$p_0 - p_i = \frac{1 - r^i}{1 - r} \ {}_0 \Rightarrow p_0 - p_L = \frac{1 - r^L}{1 - r} \ {}_0 \Rightarrow \ {}_0 = \frac{1 - r}{1 - r^L}$$

$$\Rightarrow p_i = 1 - \frac{1 - r^i}{1 - r} \cdot \frac{1 - r}{1 - r^L} = 1 - \frac{1 - r^i}{1 - r^L} = \frac{r^i - r^L}{1 - r^L}.$$

- 输光的　　：$L = M + N,\ i = M.$

$$p_M = \begin{cases} \frac{N}{M+N}, & p = \frac{1}{2}. \\ \frac{r^M - r^{M+N}}{1 - r^{M+N}}, & p \neq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

例6.4. 敏 ¯题的调 .

- 在¯ ò 调 时, 某些敏 ¯题会遭到 á ý 回答或谎报. 如, 调 运动员 “是否曾服用过兴奋 ”.
-) û 办法: 增设 Ã 害¯题. 如,
  ¯题A: 你的生日是否在7月1日之前(不含7月1日)?
  ¯题B: 你是否服用过兴奋 ?
- 在盒中放入红、白球, 其中红球数量占比 • (® 知). 若 白球, 则回答¯题A; 若 红球, 则回答¯题B.
- 若 本量 大(如, 有 $n = 200$ 受调 者), 则可用统 来估 服用兴奋 的比例(• p).

例6.5(发报与 收). 发报台分别± 0.6和0.4发 信号“•”和“–”. 信号可能ø . 正确 收与错ø 收的 如下表:

设收到信号“•”.

求: 发报台发 的是“•”的 .

		收 •	收 –
发	•	0.8	0.2
	–	0.1	0.9

- $A =$ “发 信号‘•’”, $B =$ “收到信号‘•’”.
- ¤求如下. (: 基本可±判断原来是发 的“•”.)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)}$$
$$= \frac{0.6 \times 0.8}{0.6 \times 0.8 + 0.4 \times 0.1} = 0.923.$$

- : 两 基本情况(A, A^c), 观测到˜ (果(B 发生), 逆推A 与A^c 中哪˜ 情况是实 情况.

定理6.2(逆 式). 设$A_1; : : : ; A_n$ • ˜ 备事 , $P(B) > 0$. 则

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}: \qquad (6.6)$$

- 证: 联合条 的定 Â 与全 式.
- : 备事 还可 ± 包含可 事 .
- 逆 式 • • 贝 “ d (Bayes) 式.

例6.6(艾 病 测).

- 美国的艾 病人比例保守估 1000 分之˜.
- 是否应 对新婚夫 ?行艾 病毒血– 测?
- “血– 测法” 种(果 其 :

		(果	
		报 性	报 ò性
实	AIDS	真 性(0.95)	ò性(0.05)
情况	非AIDS	性(0.01)	真ò性(0.99)

- 设某人报 性. 求: “真是患病者” 的 .
- A = “受试者带有艾 病毒”, T = “ 测(果 性”.
- $P(A) = p \approx 0{:}001$, $P(T|A) = 0{:}95$, $P(T|A^c) = 0{:}01$.
求$P(A|T)$.

- $P(A) = p \approx 0:001$, $P(T|A) = 0:95$, $P(T|A^c) = 0:01$. 求$P(A|T)$.
- 由逆 式,

$$P(A|T) = \frac{P(A)P(T|A)}{P(A)P(T|A) + P(A^c)P(T|A^c)}$$

$$= \quad p \times 0:q$$

§1.7 独立试 序 型

例7.1 (独立)重 抛5 次硬币. 求: “恰有两次正面” 的 .

-)：古典 型. 共有$2^5 = 32$ 等 基本事 .
- 其中恰有两次正面 上的 数 • $C_5^2 = 10$.
- ¤ 求 •

$$\frac{C_5^2}{32} = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 : \tag{7.1}$$

- 若 • “分币不þ匀”, 每 ˜ 次 “正面” • p, 则 ¤ 求 •

$$C_5^2 p^2 (1-p)^3 :$$

- 此时, 备事 中的事 不等 .

例7.2 某人打靶, 命中 • 0.7, 独立重 射击5次. 求: “恰好命中2 次” 的 .

- $p = 0{:}7; q = 1 - p = 0{:}3.$
- $P(\text{恰好命中2次}) = C_5^2 p^2 q^3.$
- $P(\text{恰好命中3次}) = C_5^3 p^3 q^2.$
- $P(\text{恰好命中4次}) = C_5^4 p^4 q^1.$
- $P(\text{恰好命中5次}) = C_5^5 p^5 q^0.$
- $P(\text{恰好命中1次}) = C_5^1 p^1 q^4.$
- $P(\text{恰好命中0次}) = C_5^0 p^0 q^5.$

定理. 设单次试 中, 事 A 发生(•)的 • p (•). 则在n次(独立)重 试 中, 对$k = 0; 1; 2; \ldots; n$,

$$P(A\text{发生}k\text{次}) = C_n^k p^k q^{n-k}; \quad (q = 1 - p).$$

- ˜ 般而言, 设$0 < p < 1$. 否则答案是平凡的.
- 证: $A_i =$ "第i 次试 中, A 发生" .
- 2^n 形如$C_1C_2 \cdots C_n$ (其中C_i 可 ± 是A_i 或A_i^c) 的事 构 备事 . (若$p \neq 1/2$, 则 § 们不等 .)
- 其中, 有$m = C_n^k$ 符合 "A发生k次" . • $B_1; \cdots; B_m$.
- $P(B_1) = \cdots = P(B_m) = p^k q^{n-k}$. 故 (立.

- ：“重　”蕴含两重含Â:
- (1) 每次试　的条　相同, 从而　　　　不变;
- (2) 　次试　的 (果(是否　　)相互独立.
- 反例: ®知80　　品中有5　次品, 从中每次任取˜　, Ã放回地取20次, 求: “其中有2　次品”的　　.
- (1)反例中, 每次　取的试　条　不同, 不能直　认•每次的 (“取到次品”)　　不变(•然这是事实);
- (2) 反例中,　次的　取 (果(是否“取到次品”)不独立.
- ：若　品批量特别大, 则可用独立试　序　　型 C q　Ž.

例7.3. 设每次射击打中目标的　　等于0.001. 设射击5000 次, 求: "至少两次打中目标" 的　　.

- $p = 0{:}001; q = 0{:}999.$

$$P(\text{至少两次打中目标}) = \sum_{k=2}^{5000} P(\text{恰有}k\text{ 次打中目标})$$

$$=1 - P(\text{都不中}) - P(= \text{中}\,\tilde{}\,\text{次})$$

$$=1 - q^{5000} - 5000 \times pq^{4999} \approx 1 - 0{:}006721 - 0{:}03364$$

$$\approx 0{:}9596{:}$$

- 式 ˜ 、当n 很大且p 很小的时候， np 视 • 数 .
  在n 次重 试 中，

$$P(\quad k \text{ 次}) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{k}{k!} e^{-} \; : \qquad (7.2)$$

  - 泊松分布 C q， §2.2(P55).

- 如，例7.3, $n = 5000$, $p = 0{:}001$, $np = 5$,

$$P(\text{都不中}) \approx e^{-5000 \times 0:001} \approx 0{:}006738;$$

$$P(= \text{中 ˜ 次}) \approx \frac{5000 \times 0{:}001}{1!} e^{-5000 \times 0:001} \approx 0{:}03369;$$

$$P(\text{至少两次打中}) \approx 1 - 0{:}006738 - 0{:}03369 \approx 0{:}9596{:}$$

- 式二、当n 很大, 但p 不是很小时, p 视 • 数.
  在n 次重 试 中,

$$P(\quad k\text{次}) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}x_k^2};$$

$$\text{其中}; \ x_k = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

- 参 §4.6(P153)的中心 限定理.
- : $\quad (x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. 则$\star\star = \quad (x_k) \quad x_k$.

例7.4. 设每次射击打中目标 • $p = \frac{1}{6}$. 设射击$n = 6000$ 次.
求: "击中次数在900到1100之 " 的 .

- 用 式二: $P($ k次$) \approx$ (x_k) x_k, 其中

$$(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad x_k = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}:$$

- ¤ 求 •

$$\sum_{k=900}^{1100} P(\quad k \text{ 次}) = \sum_{k=900}^{1100} (x_k) \quad x_k \approx \int_a^b (x)dx = (b) - (a);$$

其中 $(y) = \int_{-\infty}^{y} (x)dx$.

- $a = x_{900} \to x_{900-0:5}$, $b = x_{1100} \to x_{1100+0:5}$.
- 表得到 $(b) - (a) \approx 0:99950$.

例7.5(单 ‘ 机游动). 质点从原点 发, 每 ˜ 步向右或 £ 动 ˜ 单 , : p, $q = 1 - p$. 求: “质点n 步后 于K” 的 .

- : $0 < p < 1$, n 是正整数, K 是非 整数, $n - K$ • 偶数.
- 设质点右 £ x 步, £ y 步, 则

$$x + y = n; \quad x - y = K \Rightarrow x = \frac{n+K}{2}.$$

- 右 £ 视 • . 则 ¤ 求 • 在n 次重 试 中,

$$P\left(\quad \frac{n+K}{2} \text{ 次} \right) = C_n^{\frac{n+K}{2}} p^{\frac{n+K}{2}} q^{\frac{n-K}{2}}.$$