

例5.1. 50 ~ 54 岁的美国妇女乳腺癌发病 为 $p_0 = 2\%$. 调查10000 名50 ~ 54 岁的母亲患有乳腺癌的妇女, 发现其中有400 名患乳腺癌. 检验

$$H_0 : p = 2\% \leftrightarrow H_1 : p \neq 2\%.$$

• $X \sim B(n, p)$: 在 H_0 下, 近似地有

$$\frac{X - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} \approx N(0, 1), \quad (q = 1 - p).$$

• 否定域:

$$W = \left\{ x : \left| \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} \right| > z_{1-\alpha/2} \right\}.$$

• $\frac{x - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} = 14.28 > 1.96 = z_{0.975}$, 否定 H_0 .

例5.2. 学生刻苦(复习时间:上课时间 > 1:1)的概率为 p . 在132份调查问卷中发现有127人刻苦. 检验

$$H_0 : p \leq p_0 = 0.9 \leftrightarrow H_1 : p > p_0.$$

- $X \sim B(n, p)$. 小样本方法: 否定域为 $\mathcal{W} = \{x : x \geq i\}$.

- i 满足 $f(i, p_0) \leq \alpha < f(i-1, p_0)$: 由例3.6.7,

$$f(i, p) = P_p(X \geq i) = \int_0^p \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} u^{i-1} (1-u)^{n-i} du.$$

- $\mathcal{W} = \{x : f(x, p_0) \leq \alpha\}$. 因为, $x \geq i \Leftrightarrow f(x, p_0) \leq f(i, p_0)$.

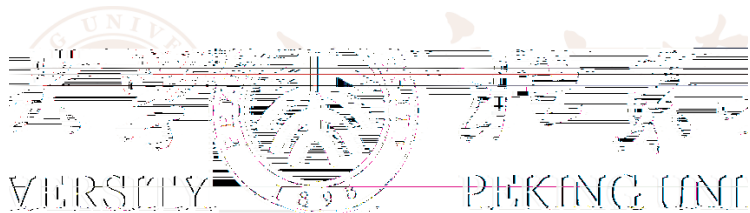
- $f(x, p_0) = P(Y \geq y)$, 其中 $Y \sim F = F(2(n-x+1), 2x)$,
 $\varphi(y) := \left(1 + \frac{n-x+1}{x} y\right)^{-1} = p_0$.

- $\mathcal{W} = \{x : p(x) \geq p_0\}$, 其中, $p(x) := \varphi(F_{1-\alpha})$:

$$f(x, p_0) \leq \alpha \text{ iff } y \geq F_{1-\alpha} \text{ iff } p_0 \leq \varphi(F_{1-\alpha}).$$

- 否定 H_0 :

$$p(127) = \left(1 + \frac{132-127+1}{127} F_{0.95}\right)^{-1} = 0.9220 > p_0.$$



$$H_0 : p_1 = p_2 \leftrightarrow H_1 : p_1 \neq p_2.$$

- 在 H_0 下, $p_1 = p_2 = p$. CLT:

$$\frac{X}{n_1} - p \stackrel{d}{\approx} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_1}} Z_1, \quad \frac{Y}{n_2} - p \stackrel{d}{\approx} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n_2}} Z_2,$$

$$\frac{X - Y}{n_1 - n_2} \stackrel{d}{\approx} \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\hat{p}\hat{q}} Z.$$

• SLLN: $\hat{p} = \frac{X+Y}{n_1+n_2} \approx p$.

- $\zeta = (\bar{X} - \bar{Y})/\star\star$. 否定域: $\mathcal{W} = \{x : |\zeta| \geq z_{1-\alpha/2}\}$.

例5.3. 研究口服避孕药对40 ~ 44 岁年龄段妇女心脏的影响.
 5000 位使用者三年内心梗死13 人; 10000 位不使用者三年内心梗死7 人. 检验 $H_0 : p_1 = p_2$. ($\alpha = 0.01$.)

- $\hat{p}_r = (13 + 7)/(5000 + 10000) = 20/15000$.

- $\xi = (\bar{x} - \bar{y}) / \sqrt{(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})pq} = 3.01 > 2.58 = z_{0.995}$, 否定 H_0 .

- 改为验证 $H_0 : p_1 \leq p_2$.

- $\hat{p}_1 = 13/5000, \hat{p}_2 = 7/10000$.

- $\eta = (\bar{x} - \bar{y}) / \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}} = 2.48 > 2.33 = z_{0.99}$, 否定 H_0 .