

§8.3 单参数模型中的检验

- 复杂检验问题 (Θ_0, θ_1) 与 (Θ_0, Θ_1) :

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1,$$

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

- **定理3.1.** 若存在 $\theta_0 \in \Theta_0$ 使得检验问题 (θ_0, θ_1) 的水平为 α 的UMP否定域 \mathcal{W} 满足: $P_{\theta}(X \in \mathcal{W}) \leq \alpha, \forall \theta \in \Theta_0$. 则, \mathcal{W} 是检验问题 (Θ_0, θ_1) 的水平为 α 的UMP否定域.

- **定理3.2.** 若对任意 $\theta_1 \in \Theta_1$, 检验问题 (Θ_0, θ_1) 都存在水平为 α 的UMP否定域 \mathcal{W} , 且此 \mathcal{W} 不依赖于 θ_1 . 则, 此 \mathcal{W} 是检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的UMP否定域.

- 定义3.1. 若 Θ 为有限或无穷区间, 密度或分布列为

$$f(x, \theta) = S(\theta)h(x) \exp \{C(\theta)T(x)\}, \quad \theta \in \Theta,$$

其中, $C(\theta)$ 严格增. 则称 $f(x, \theta), \theta \in \Theta$ 为单参数指数族.

- 定理3.3*. 若为单参数族, 则 $P_{\theta}(\sum_{i=1}^n T(X_i) > c)$ 关于 θ 单调上开.

- 例3.1. $f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} \exp \left\{ -\frac{1}{\theta} x \right\}, x > 0. \Theta = (0, \infty).$

记 $X_0 \sim \text{Exp}(1)$, 则 $X_{\mu} \stackrel{d}{=} \mu + X_0$.

- 例3.2. $X \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma^2$ 已知. $\theta = \mu, \Theta = (-\infty, \infty).$

$$f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}.$$

记 $X_0 \sim N(0, \sigma^2)$, 则 $X_{\mu} \stackrel{d}{=} \mu + X_0$.

例3.2. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知(= 1.21), 测得6个数据.

$\mu \geq 30$ 则合格. 问: 设水平为 $\alpha = 0.05$, 是否可以出厂?

- 提问题. $H_0: \mu \leq \mu_0 = 30 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$. (防止次品出厂).
- 总体为单参指数族: $f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}$.

$T(x) = x$, 因此, UMP 否定域形如

$$\mathcal{W} = \left\{ \vec{x} : \sum_{i=1}^n x_i > \tilde{c} \right\} = \left\{ \vec{x} : \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} > c \right\}$$

- 取 $c = z_{1-\alpha}$:

$$P_{\mu_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P_{\mu_0} \left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > c \right) = \alpha.$$

- 查表获得 $z_{0.95} = 1.65$.

代入数据: $\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} = 2.212 > 1.65$, 故否定 H_0 , 可出厂!

例3.3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 已知($= 3$), 测得9个数据.

$\sigma < \sigma_0 = 0.005$ 则合格. 问: 设水平为 $\alpha = 0.05$, 是否合格?

- 提问题. $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.
- 总体为单参指数族: $f(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\}$,
 $T(x) = (x - \mu)^2$, 因此, UMP 否定域形如

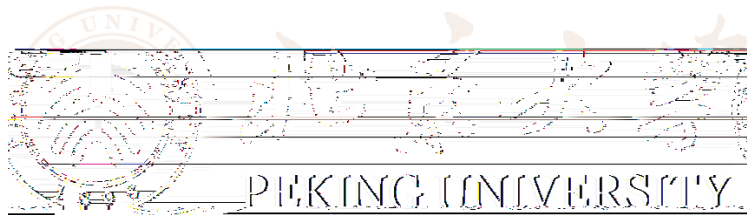
$$\mathcal{W} = \left\{ \bar{x} : \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 < \tilde{c} \right\} = \left\{ \bar{x} : \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 < c \right\}.$$

- 取 $c = \chi_{\alpha}^2(n)$:

$$P_{\sigma_0^2}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P_{\sigma_0^2} \left(\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 < c \right) = \alpha.$$

- 查表获得 $c = \chi_{0.05}^2(9) = 3.325$.

代入数据: $\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 13.2563 > 3.325$, 故接受 H_0 .



例3.4. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知. 求

$$H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$$

的水平为 α 的最优无偏否定域.

● 总体为单参指数族: $f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}$.

● $T(x) = x$. 在 $\mu = \mu_0$ 下, $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$, 分布关于 μ_0 对称.

因此, UMPU 否定域形如

$$W = \{\bar{x} : |\bar{x} - \mu_0| > c\} = \left\{ \bar{x} : \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right| > \tilde{c} \right\}.$$

● 查表获得 $\tilde{c} = z_{1-\alpha/2}$, 于是 $c = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$.