

第八章、假设检验

§8.1 问题的提法

- 例1.1. 200 件产品, b 件次品. 问: 次品 $p(= \frac{b}{200}) \leq 3\%$?

方法: 抽查10 件, 观察数据(例如: 发现2 件次品).

- 例1.2. 纸币长度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 问: $\mu = 155\text{mm}$?

方法: 测量10 张纸币的长度, 得到数据 (x_1, \dots, x_{10}) .

- 检验与估计相同之处.

模型: $X \sim F_{\theta}, \theta \in \Theta$ 目标: 对 θ 做出一些结论

方法: 抽样, 产生数据 $X_1, \dots, X_n \sim \text{i.i.d. } F_{\theta}$.

- 检验与估计不同之处.

估计: 输出值 $\hat{p}, \hat{\mu}$, 或者区间.

检验: 回答 **问题**, 输出 “是” 或 “否” .

• 定义1.1. 假设/原假设 $H_0 : \theta \in \Theta_0$.

对立假设/备择假设 $H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$.

检验问题 (Θ_0, Θ_1) . $H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$.

• 问题的提法: H_0 是否成立?

• 检验方法: 给出一个否定域 $\mathcal{W} (\subseteq \mathbb{R}^n)$.

若数据 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{W}$, 则输出“拒绝(否定) H_0 ”;
若 $\vec{x} \notin \mathcal{W}$, 则输出“不拒绝(接受) H_0 ”.

检验方法= 带概 的反证法.

- 寻找 \mathcal{W} 使得

$$P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leq \alpha, \quad \theta \in \Theta_0.$$

- $\vec{x} \in \mathcal{W}$: 假设 H_0 成立, 那么小概率事件 $\{\vec{X} \in \mathcal{W}\}$ 发生了, 矛盾! 因此, 原假设 H_0 不成立. 即, 否定 H_0 .

注: 在指定水平下有充分证据表明 H_0 不成立, 推出 H_1 成立.
强烈的否定!

- $\vec{x} \notin \mathcal{W}$: 没有足够充分的证据表明 H_0 不成立.

但同样不代表已经有充分的证据接受 H_0 , 微弱的接受.

- 两类错误:

第一类: H_0 为真, 否定 H_0 . 犯错概 $P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}), \theta \in \Theta_0$.

第二类: H_0 为假, 接受 H_0 . 犯错概 $P_{\theta}(\vec{X} \notin \mathcal{W}), \theta \in \Theta_1$.

例1.6. 药品检验. 药效 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知.

若 $\mu \geq \mu_0$, 则药有效; 若 $\mu \leq \mu_0$, 则药无效.

- 怎样提 H_0 ?

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu < \mu_0$$

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0.$$

- 控制第一类错误, 即 H_0 为真却输出“定 H_1 ”的概率

$$\sup_{\theta \in \theta_0} P_{\theta}(X \in \mathcal{W}) \leq \alpha.$$

- 防止假药上市, 即 $\mu \leq \mu_0$ 为真却输出“定 $\mu \geq \mu_0$ ”.
- 因此, 应该选 $H_0 : \mu \leq \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$.

- 定义1.2. 称 $\beta_{\mathcal{W}}(\theta) := P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W})$ 为 \mathcal{W} 的功效函数. 若

$$P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0,$$

则称 \mathcal{W} 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的一个(显著性)水平为 α 的否定域.

- 注: 选取 \mathcal{W} , 使得 $\beta_{\mathcal{W}}(\theta)$ 在 Θ_0 小, 在 Θ_1 越大越好.

- 定义1.3. 若 \mathcal{W} 是检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的否定域, 并且对任意水平为 α 的否定域 $\tilde{\mathcal{W}}$ 都有

$$P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geq P_{\theta}(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

则称 \mathcal{W} 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的一致最大功效否定域/UMP否定域.

- 定义1.4. 若

$$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leq \alpha \leq P_{\theta_1}(\vec{X} \in \mathcal{W}), \quad \forall \theta_0 \in \Theta_0, \theta_1 \in \Theta_1,$$

则称 \mathcal{W} 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的一个水平为 α 的无偏否定域.

- 定义1.5: 若 \mathcal{W} 是检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的无偏否定域, 并且对任意水平为 α 的无偏否定域 \mathcal{W}' 都有:

$$P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geq P_{\theta}(\vec{X} \in \mathcal{W}'), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

则称 \mathcal{W} 为检验问题 (Θ_0, Θ_1) 的水平为 α 的一致最大功效无偏否定域/**最优无偏否定域**/UMPU 否定域.