

§7.7 置信区间和置信限

定义7.1. 假设 $\underline{T} = \underline{T}(X_1, \dots, X_n)$ 与 $\bar{T} = \bar{T}(X_1, \dots, X_n)$ 为统计量, $\alpha \in (0, 1)$.

(1) 若 $\underline{T} < \bar{T}$ 且

$$P_{\theta}(\underline{T} \leq g(\theta) \leq \bar{T}) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 $[\underline{T}, \bar{T}]$ 为 $g(\theta)$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

(2) 若

$$P_{\theta}(\underline{T} \leq g(\theta)) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 \underline{T} 为 $g(\theta)$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信下限.

(3) 若

$$P_{\theta}(g(\theta) \leq \bar{T}) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称 \bar{T} 为 $g(\theta)$ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信上限.

1. 枢轴量法

- 定义7.2. 假设 $g(\theta)$ 是待估量. 若

$$h = h(X_1, \dots, X_n; g(\theta))$$

的分布与 θ 无关, 则称 h 为枢轴量.

- Step 1. 找枢轴量 $h = h(\vec{X}, g(\theta))$ 及其分布 F .
- Step 2. 利用 F 选择 a, b , 使得:

$$P(a \leq h \leq b) \geq 1 - \alpha.$$

- Step 3. 将 $a \leq h \leq b$ 化为 $\underline{T} \leq g(\theta) \leq \bar{T}$, 于是得到

$$P(\underline{T} \leq g(\theta) \leq \bar{T}) \geq 1 - \alpha.$$

1. 枢轴量法

例7.1. 总体: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. 样本量: n . 求 λ 的置信区间.

- $\lambda X \sim \text{Exp}(1)$, 因此,

$$h_1 = \lambda(X_1 + \cdots + X_n) \sim \Gamma(n, 1).$$

- $2\lambda X \sim \text{Exp}(\frac{1}{2})$, 因此

$$h_2 = 2\lambda(X_1 + \cdots + X_n) \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2n).$$

- 查 $\chi^2(2n)$ 的表获得 $\lambda_1 = \chi_{\alpha/2}^2(2n)$, $\lambda_2 = \chi_{1-\alpha/2}^2(2n)$. 于是, $P_\lambda(\lambda_1 \leq h_2 \leq \lambda_2) = 1 - \alpha$. 从而, 所求为 $[\underline{T}, \bar{T}]$, 其中,

$$\underline{T} = \frac{\lambda_1}{2(X_1 + \cdots + X_n)}, \quad \bar{T} = \frac{\lambda_2}{2(X_1 + \cdots + X_n)}.$$

2. 正态总体 $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 中参数的置信区间

- 定义3.6.8 & 7.3. n 维正态分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 的联合密度为:

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\vec{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}.$$

其中, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$, $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{n \times n}$
正定.

- 定义3.6.6, 3.6.7 & 7.4.

$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ 的期望与协方差阵分别指

$$E\vec{X} = (EX_1, \dots, EX_n)^T, \quad \text{cov}(\vec{X}, \vec{X}) = (\text{cov}(X_i, X_j))_{n \times n}.$$

\vec{X} 与 $\vec{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ 的协方差阵指

$$\text{cov}(\vec{X}, \vec{Y}) = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1, Y_1) & \cdots & \text{cov}(X_1, Y_m) \\ \text{cov}(X_n, Y_1) & \cdots & \text{cov}(X_n, Y_m) \end{pmatrix}_{n \times m}.$$

- 引理7.1. 矩阵运算, 例: $\text{cov}(\mathbf{A}\vec{X}, \vec{Y}) = \mathbf{A}\text{cov}(\vec{X}, \vec{Y})$.





例7.2 & 7.3. σ^2 已知, (例如, $X \sim N(\mu, 1)$).

求: μ 的置信度为 $1 - \alpha$ 的(1) 置信区间, (2) 置信上限.

- 取 $h = h(X_1, \dots, X_n, \mu) := \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

- (1) 查表获得 $z_{1-\alpha/2}$, 于是 $P_\mu(|h| \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$. 因此,

$$P_\mu\left(|\bar{X} - \mu| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

- 概 论 角 度: $\bar{X} \in [\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x]$,

未知的随机 \bar{X} 落在已知的确定区间中

- 统计学角度: $\mu \in [\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x]$ (此即所求置信区间),
已知的随机区间(可由数据得到)覆盖未知参数 μ (确定的).

- (2) 置信上限为 $\bar{\mu} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{1-\alpha}$:

$$P_\mu(h \geq z_\alpha) = 1 - \alpha \Rightarrow P_\mu\left(\bar{X} \leq \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha\right) = 1 - \alpha.$$

- 定理7.1 的证明: $X_i = \mu + \sigma Z_i$. 正矩阵 $\mathbf{A}_{n \times n}$ 的第一行是 $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$. 令 $\vec{Y} = \mathbf{A}\vec{Z}$, 则 $Y_1, \dots, Y_n \sim \text{i.i.d. } N(0, 1)$.
- 考察

$$h = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{S^2}}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

- 考察分子: $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) = \sigma\sqrt{n}\bar{Z} = \sigma Y_1$.

考察分母: $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2 \sum_{i=2}^n Y_i^2$. 于是,

$$h = \frac{Y_1}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n Y_i^2}}$$

- 自由度为 n 的 t 分布(记为 $t(n)$) 指的是

$$T_n := \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n}(Z_1^2 + \dots + Z_n^2)}}$$

服从的分布, 其中 Z, Z_1, \dots, Z_n 独立同分布, $Z \sim N(0, 1)$.

- 因此,

$$h = h(X_1, \dots, X_n; \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{S^2}} \sim t(n-1),$$

其中

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 =: \hat{\sigma}^2$$

为 σ^2 的UMVU估计.

- 查表获得 $t_{1-\alpha/2}(n-1)$. 因此

$$P_{\mu} \left(|\bar{X} - \mu| \leq \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right) = 1 - \alpha.$$

- 所求置信区间为

$$\left[\bar{X} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right].$$

例7.5. $\theta = (\mu, \sigma^2)$. 求 σ^2 的置信度为 $1 - \alpha$ 的置信上限.

- 枢轴量: 由定理7.1,

$$h := \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

- 查表获得 $\chi_\alpha^2(n-1)$, 于是

$$P_\theta(h \geq \chi_\alpha^2(n-1)) = 1 - \alpha.$$

因此,

$$P_\theta\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_\alpha^2(n-1)} \leq h\right) = 1 - \alpha.$$

- 所求置信上限为 $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\chi_\alpha^2(n-1)}$.
- 注: 若 μ 已知, 则枢轴量和置信上限应为

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n), \quad \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_\alpha^2(n)}.$$



例7.6. 90 人中15 人反应课业负担重, 求: 负担重的百分比 θ 的0.95 置信区间.

- 总体: $X \sim B(1, \theta)$, 样本量: $n = 90$.
- 由CLT,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1).$$

于是,

$$P_{\theta} \left(\left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}} \right| \leq z_{1-\alpha/2} \right) \approx 1 - \alpha.$$

- 查表获得 $z_{0.95} = 1.96$, 于是

$$\left| \frac{\sqrt{90}(\frac{15}{90} - \theta)}{\sqrt{\theta(1 - \theta)}} \right| \leq 1.96 \Rightarrow \theta \in [0.1037, 0.2569],$$

此即所求的近似置信区间.