§4.3 中心极限定理

- 定理3.1(Linderberg-Levy CLT). 假设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, $0 < \mathrm{var}(X_1) < \infty$. 那么,

$$S_n^* \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

- 应用:

$$P(S_n \leqslant x) = P(S_n^* \leqslant x^*) \approx \Phi(x^*) = p,$$

其中, $x^* = \frac{x-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$.

例3.1. 加法器同时收到20 个噪声电压V_k, $k=1,\cdots,20$, 它们独立同分布, $V_1 \sim U(0,10)$. 记$V=\sum_{k=1}^{20} V_k$, 求$P(V>105)$.

- 此题已知$n=20$, $x=105$, 求p.
- $EV_1=5$, $\mathrm{var}(V_1)=\frac{10^2}{12}$.
- 根据CLT,

$$P(V>105)=P(V^*>x^*)\approx 1-\Phi(x^*)=:p,$$

其中,

$$x^*=\frac{105-20*5}{\sqrt{20*\frac{100}{12}}}.$$

- 计算得$x^*\approx 0.387$. 查表得$\Phi(x^*)=0.652$, 从而所求之$p=1-0.652=0.348$.

例3.2. 旅馆有500间客房, 每间有一台2千瓦的空调. 入住率为80%. 问: 需[illegible] 千瓦的电力能有99% 的把握保证电力足够?

- 已知n, p, 求x. 假设提供x 千瓦.
- A_i = 第i 间房开空调, $P(A_i) = 80\%$, $X_i = 2 \times 1_{A_i}$. $n = 500$.
- $EX_1 = 2.8 = 1.6$, $\text{var}(X_1) = 4 \times 0.8 \times 0.2 = 0.64$.
- 要求x 满足: $P(S_n \leqslant x) \geqslant 99\% = p$. 根据CLT, 要求

$$P(S_n^* \leqslant x^*) \approx \Phi(x^*) \geqslant 0.99,$$

其中

$$x^* = \frac{x - 500 * 2 * 0.8}{\sqrt{500 * 2^2 * 0.8 * 0.2}}.$$

- 查表得$\Phi(2.33) = 0.99$. 即, 要求$x^* \geqslant 2.33$.

即, 要求$x \geqslant 800 + 2.33 * \sqrt{320} = 841.68$, 从而需842 千瓦.

例3.3. 桥的强度$Y \sim N(300, 40)$ (单位: 吨), 车的平均重量为5, 方差为2. 问: 为保证桥不出问题的概率不小于0.99997, 最■允许在桥上同时出现■ 辆车?

- 已知x, $p = 0.99997$, 求n.
- 假设有n 辆车在桥上, 第i 辆的重量为X_i.
  模型假设$X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布, 且与Y 相互独立.
- 记$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, 保证$P(S_n \leqslant Y) \geqslant 0.99997$.
- 根据CLT 及独立性, 近似地,
  $S_n - Y \sim N(5n - 300, 2n + 40)$. 因此, 令$0^* = \frac{0-(5n-300)}{\sqrt{2n+40}}$, 有

$$P(S_n \leqslant Y) = P(S_n - Y \leqslant 0) \approx \Phi(0^*).$$

- 要求$\Phi(0^*) \geqslant 0.9997$, 查表得$x^* \geqslant 4$, 即, $\frac{-(5n-300)}{\sqrt{2n+40}} \geqslant 4$, 解得$n \leqslant 50.5$. 从而, 最■同时50 辆车.