

§ 大数 和强大数

定理 (Chebyshev's WLLN, 定理 .)

假设 X_1, X_2, \dots 相互独立, 且 $\text{var}(X_i) \leq M, \forall i$. 那么,

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0.$$

• 令 $A_n = \{|\frac{1}{n}(S_n - ES_n)| \geq \epsilon\}$. 需验证 $P(A_n) \rightarrow 0$.

• 由切比雪夫不等式,

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P(|S_n - ES_n| \geq n\epsilon) \leq \frac{\text{var}(S_n)}{(n\epsilon)^2} \\ &\leq \frac{nM}{n^2\epsilon^2} = \frac{M}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

• “相互独立”可减弱为“两两不相关”.

- 推论 1'. 设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, $\text{var}(X_1) < \infty$, 则

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} EX_1.$$

- 推论 1. 单次试验中 A 发生的概率为 p , 则

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i \xrightarrow{P} p$$

= n 次试验中 A 发生的频率 $\xrightarrow{P} \mu$.

- 例 1. 设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, 密度为 $p(x)$.

不加证明地接受 $\frac{S_n}{n}$ 与 X_1 有相同的密度. 于是,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) = P(|X_1 - a| > \varepsilon) \text{ 不趋于 } 0.$$



- 展开

$$ES_m^4 = E \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^4 = \sum_{i,j,k,l=1}^m EX_i X_j X_k X_l.$$

- 同类项 r, s, t, u 互不相等,

$$EX_r^4, EX_r^3 X_s, EX_r^2 X_s^2, EX_r^2 X_s X_t, EX_r X_s X_t X_u.$$

$$EX_r^4 = EX_r^3 X_s = EX_r^2 X_s X_t = EX_r X_s X_t X_u =$$

$$EX_r^4 \leq M, \text{ 且}$$

$$EX_r^2 X_s^2 = (EX_r^2)(EX_s^2) \leq \sqrt{EX_r^4} \sqrt{EX_s^4} \leq M.$$

- 于是,

$$ES_m^4 \leq mM + C_m^2 C_4^2 M \leq m^2 M.$$

$$\Rightarrow P(A_m) \leq \frac{M}{\varepsilon^4} \times \frac{1}{m^2} \Rightarrow P \left(\bigcup_{m=n}^{\infty} P(A_m) \right) \rightarrow 0.$$

- 推论 . . 设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, EX_1^4 存在, 则 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.

- 推论 . . 单次小试验中事件 A 发生的概率为 p . 在独立重复试验中, 前 n 次试验中 A 发生的频率 $\xrightarrow{\text{a.s.}} p$.

- 定理 . . (Kolmogorov's SLLN): 假设 X_1, X_2, \dots 独立同分布, 期望存在, 则 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.
- 时间平均 = 空间平均, (期望的含义).

应用(7) 统计方法的理论依据.

- 数据- X_1, \dots, X_n 为 X 的 n 次独立观测值, 它们独立同分布.
- 估计期望-

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} EX.$$

估计方差

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} EX^2 - (EX)^2 = \text{var}(X).$$

应用() 估计积分 $I = \int_a^b f(x)dx$.

• $I = \int_0^1 f(a + (b-a)u)(b-a)du$, 因此不妨假设 $a = 0$, $b = 1$.

• $I = \int_0^1 f(x) dx = E[f(U)]$,

• SLLN

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(U_1) + \dots + f(U_n))$$