

第四章概 极限定理

§4.1 随机序列的收敛性

- 定义1.1. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

则称 ξ_n 依概 收敛于 η , 记为 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.

- 定义1.2. 若

$$P\left(\varliminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \eta\right) = 1$$

则称 ξ_n 几乎必然收敛于 η , 记为 $\xi_n \xrightarrow{a.s.} \eta$.

- 定义1.3. 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_{\eta}(x), \quad \forall x \in C(F_{\eta}),$$

则称 ξ_n 依分布收敛于 η , 记为 $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$.

• 定理1.1. 若 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$, 则 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.

• 令 $A_n = \{|\xi_n - \eta| \geq \varepsilon\}$, 则(不加证明地接受)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta \quad \text{当且仅当} \quad P\left(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$\xi_n \xrightarrow{P} \eta \quad \text{当且仅当} \quad P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

• 例1.1 表明 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ 不能推出 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$

• 定理1.2. 若 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$, 则 $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$.

• 例1.2 表明 $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$ 不能推出 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.

- 假设 X_1, X_2, \dots 是随机变量序列, 令

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

- 定义1.4. 若 $EX_n, n = 1, 2, \dots$ 都存在, 且

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0,$$

则称 X_1, X_2, \dots 服从(弱)大数 (Weak Law of Large Numbers, WLLN).

- 定义1.5. 若 $EX_n, n = 1, 2, \dots$ 都存在, 且

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

则称 X_1, X_2, \dots 服从强大数 (SLLN).

- 定义1.6. 若 $EX_n, \text{var}(X_n), n = 1, 2, \dots$ 都存在, $\text{var}(X_n)$ 不全为0, 且

$$S_n^* = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\text{var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1),$$

则称 X_1, X_2, \dots 服从中心极限定理(Central Limit Theorem, CLT).

- 定义1.7. 若对任意 $n \geq 2$ 都有 X_1, \dots, X_n 相互独立, 则称 X_1, X_2, \dots 相互独立.

- 若 X_1, X_2, \dots 相互独立, 且 $X_n \stackrel{d}{=} X_1, \forall n \geq 2$, 则称 X_1, X_2, \dots 独立同分布, 记为i.i.d. (independent and identically distributed).