§3.5 二维随机向量的数字特征

- 定义5.1. 假设X, Y 的方差存在, 则称

$$E(X-EX)(Y-EY)$$

为X 与Y 的协方差, 记为$\mathrm{cov}(X,Y)$, σ_{XY}.

若$\sigma_{XY}=0$, 则称X 与Y 不相关.

- 注: 协方差存在, 因为

$$2(X-EX)(Y-EY)\leqslant(X-EX)^2+(Y-EY)^2.$$

- 计算公式: $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-(EX)(EY)$.

- 定理5.1. 假设X, Y 的方差存在, 则称

$$(\mathrm{cov}(X,Y))^2 \leqslant \mathrm{var}(X)\cdot \mathrm{var}(Y).$$

- 证: 若$\mathrm{var}(X)=0$, 则$X \equiv c$, 于是$\mathrm{cov}(X,Y)=0$.

  若$\mathrm{var}(X)>0$, 则$g(t)$ 的判别式$\leqslant 0$, 其中

$$g(t) = E(t(X-EX)+(Y-EY))^2$$
$$= t^2\mathrm{var}(X)+2t\,\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{var}(Y)\geqslant 0.$$

- 定义5.2. 设$0<\mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y)<\infty$, 则称

$$\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}$$

  为X 与Y 的相关系数, 记为ρ_{XY}, 简记为ρ.

- 定理5.2. (1) $|\rho| \leqslant 1$; (2) X 与Y 独立, 则不相关, 从而$\rho = 0$; (3) $|\rho| = 1$ 当且仅当存在a, b 使得$Y = a + bX$.
- 证(3): $|\rho| = 1$ 当且仅当$g(t)$ 的判别式为0, 即存在t_0 使得

$$g(t_0) = E\left(t_0(X - EX) + (Y - EY)\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow Y = -t_0 X + EY + t_0 EX.$$

- 最优线性预测(定理5.3): 设$0 < \mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y) < \infty$, 则

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} E(Y - (a + bX))^2 = \mathrm{var}(Y)(1 - \rho_{XY}^2).$$

最小值 为:

$$b = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\mathrm{var}(X)}, \quad a = EY - bEX.$$

例5.2. 二维正态的密度:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)} \qquad u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}.$$

-