

### §3.3 随机变量的独立性

- 定义3.1. 若对任意满足 $a < b$  且 $c < d$  的实数 $a, b, c, d$ , 都有

$$P(a < X < b, c < Y < d) = P(a < X < b)P(c < Y < d),$$

则称 $X$  与 $Y$  相互独立.

- 事实上, 对大量的 $A, B \subseteq R$  有

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

- 定理3.3.  $X, Y$  相互独立当且仅当

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

- 定理3.1. 离散型,  $X, Y$  相互独立当且仅当

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

- 定理3.2. 连续型,  $X, Y$  相互独立当且仅当

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y).$$

- $X$  与  $Y$  相互独立的充分条件:

离散型:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_i q_j, \quad P(Y = y_j | X = x_i) = q_j, \quad \forall i, j;$$

连续型:

$$p_{X,Y}(x,y) = f(x)g(y), \quad p_{X|Y}(x|y) = f(x), \quad \forall x, y. \quad (\text{推论3.1})$$

例3.1.  $(X, Y)$  服从二维正态分布,  $p_{X,Y}(x, y)$  如下

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{u^2 + v^2 - 2\rho uv}{2(1-\rho^2)}\right],$$

其中,

$$u = \frac{x - \mu_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{y - \mu_2}{\sigma_2}$$

已有结论:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2}u^2\right], \quad p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}v^2\right].$$

- $X, Y$  相互独立当且仅当  $\rho = 0$ .