§2.⌐ 随机变量的方差及其他数字特征

- 定义⌐.1 ⌐.2.. 假设EX 存在, 且$E(X-EX)^2$ 也存在. 则称$E(X-EX)^2$ 为X 的方差, 记为$\mathrm{var}(X)$ 或$D(X)$.
  称$\sqrt{\mathrm{var}(X)}$ 为标准差.
- 定理⌐.1 (切比雪夫不等式) 假设$\mathrm{var}(X)$ 都存在, 则$\forall \varepsilon > 0$, 有
  $$P(|X-EX|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{var}(X).$$
- 证. $\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}=\{(X-EX)^2\geqslant\varepsilon^2\}$,
  对$Y=(X-EX)^2$ 用马尔可夫不等式.
- 推论⌐.1. 若$\mathrm{var}(X)=0$, 则X 退化.
- 证. $Y\geqslant 0$ 且$EY=0$, 故$Y\equiv 0$, 即$X\equiv c=EX$.

- 定理⌜.2. $\mathrm{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$.
- 证.

$$\mathrm{var}(X) = E(X^2 - 2X \cdot EX + (EX)^2) = EX^2 - (EX)^2.$$

- 具体地，离散型或连续型的公式如下.

$$\mathrm{var}(X) = \sum_k x_k^2 p_k - (EX)^2,$$

$$\mathrm{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx - (EX)^2.$$

- X 的线性变换的方差.

$$\mathrm{var}(aX + b) = a^2 \mathrm{var}(X).$$

( ) 泊松分布.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\cdots.$$

- $EX=\lambda$, 且$\forall k \geqslant 1$, $kp_k=\lambda p_{k-1}$. 因此,

$$k^2 p_k = \lambda k p_{k-1} = \lambda p_{k-1} + \lambda(k-1)p_{k-1} = \lambda^2 p_{k-2}, \quad \forall k \geqslant 2.$$

- 或者, $\forall k \geqslant 2$,

$$k(k-1)p_k = \lambda(k-1)p_{k-1} = \lambda^2 p_{k-2}.$$

- 于是, $EX(X-1)=\lambda^2$, 从而

$$\mathrm{var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = EX(X-1) + EX - (EX)^2 = \lambda.$$

(2) 二项分布.

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \triangleq b(n,k),\ \ k=0,1,\cdots,n,(q=1-p).$$

- $EX=np$, 且$\forall 1\leqslant k\leqslant n$,

$$k\cdot b(n,k)=np\cdot b(n-1,k-1).$$

- $\forall 2\leqslant k\leqslant n$,

$$\begin{aligned}k(k-1)\cdot b(n,k)&=np\cdot(k-1)\cdot b(n-1,k-1)\\&=np\cdot(n-1)p\cdot b(n-2,k-2)\end{aligned}$$

- 于是, $EX(X-1)=np(n-1)p=(np)^2-np^2$, 从而

$$D(X)=EX^2-(EX)^2=EX(X-1)+EX-(EX)^2=npq.$$

( ) 正态分布.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- 若$\mu = EX = 0$, $\sigma^2 = 1$, 则,

$$\mathrm{var}(X) = EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x d e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

- 一般情形, $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. 则

$$X - EX = (\mu + \sigma Y) - (\mu + \sigma EY) = \sigma(Y - EY)$$

$$\Rightarrow \mathrm{var}(X) = E\big(\sigma(Y - EY)\big)^2 = \sigma^2 \mathrm{var}(Y) = \sigma^2.$$

- 一般地, 若X 的方差存在, 且$\mathrm{var}(X) > 0$, 则

$$X^* = \frac{X - EX}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}$$

满足$EX^* = 0$, $\mathrm{var}(X^*) = 1$. 称X^* 为X 的标准化.

- 定义 . k 阶(原点)矩指EX^k.

  定义 . k 阶中心矩指$E(X - EX)^k$.

- 定义 . 若

$$P(X < a) \leqslant p \leqslant P(X \leqslant a),$$

则称a 为X 的一个p 分位数.

$p = 0.$ 时, 也称a 为一个中位数.