

§2.3 连续型随机变量

- 定义3.1. 连续型随机变量指: 存在 $p(x)$ 使得

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x)dx, \quad \forall a < b.$$

称 $p(\cdot)$ 为 X 的概密度(函数), 也记为 $p_X(\cdot)$.

- 非负: $p(x) \geq 0$; 规范: $\int p(x)dx = 1$.

$P\{X = x\} = 0$ vs $p(x) \geq 0$.

- $p(\cdot)$ 在 x 连续, 则 $P(X \in [x, x + \Delta x]) = p(x)\Delta x + o(\Delta x)$,
- 单独谈论一个点 x 对应的 $p(x)$ 没有意义.

1. 均匀分布, $X \sim U(a, b)$ (参数 $a < b$):

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & \text{若 } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

• $a \leq b \leq x$ 可改为 $a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a \leq x < b$.

• $p(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{\{a \leq x \leq b\}}$,

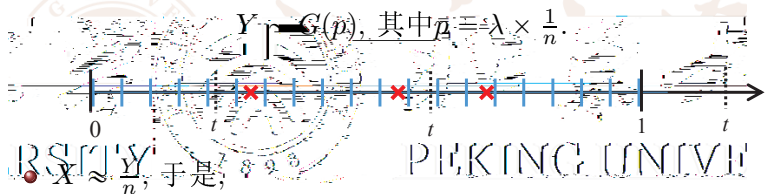
• $p(x) = \frac{1}{b-a}$, 其中 $a \leq x \leq b$.

• 模型: 几何概型.

2. 指数分布, $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ (参数 $\lambda > 0$):

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

- 模型: 例2.3. $X =$ 第一个粒子的放射时刻. 等待时间、寿命.
- 第一个粒子在第 Y 个微观时间放出, 则



$$P(X > t) \approx P(Y > nt) \approx (1 - p)^{nt} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{nt} \approx e^{-\lambda t}.$$

- $P(X > t) = e^{-\lambda t} = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx.$
- 定理3.1.(无记忆性): $P(X - s > t | X > s) = e^{-\lambda t}, \forall t, s \geq 0.$

3. 正态分布, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (参数 $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

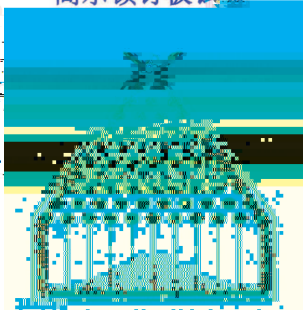
● 标准正态分布 $N(0, 1)$:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

§1.7 第二近似公式: $x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$

$$C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x_k).$$

高尔顿钉板试验



- $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, 将积分的平方写为二重积分:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \times \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$



- 函数 Φ :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(x)dx.$$

- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

- 定理3.2. 令 $x = \frac{x - \mu}{\sigma}$, 则

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) dx = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

- 推论3.1. 查表得 $\Phi(3) = 0.9987$, 因此

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.9974.$$

4. 威布尔(Weibull)分布, $X \sim W(m, \eta)$ (参数 $m, \eta > 0$):

$$p(x) = \frac{m}{\eta^m} x^{m-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{\eta} \right)^m \right\}, \quad x > 0.$$

• $\int_0^{\infty} \frac{m}{\eta^m} x^{m-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m} dx = \int_0^{\infty} e^{-z} dz = 1.$

• $m > 0$: 形状参数; $\eta > 0$: 尺度参数.

• $m = 1$ 时就是指数分布 $\text{Exp}(\frac{1}{\eta})$

• 应用: 机电产品的寿命; 可靠性研究.

5. 伽玛分布, $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ (参数 $\alpha, \beta > 0$):

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

- $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$

- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha).$

$$\int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy = -y^\alpha e^{-y} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

- $\Gamma(1) = 1; \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-y} dy = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi}.$$

- $\alpha = 1$ 时就是指数分布 $\text{Exp}(\beta)$.