§1.6 全概公式和逆概公式

- 定理6.1(全概公式)：假设B_1, ,B_n 是Ω 的分割(完备事件组; $P(B_i)$ 0, i), 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A\ B_i).$$

推导：$P(A) \overset{可列可加}{=} \sum_i P(AB_i) \overset{乘法公式}{=} \sum_i P(B_i)P(A|B_i)$.

- 可改为可列分割：$B_1, B_2,$.
- 分情况讨论!

例6.1. 甲、乙、丙三人射击敌机. 甲、乙、丙击中概　分别为: 0.4, 0.5, 0.7. 恰有0, 1, 2, 3 人击中时飞机坠毁概　分别为0, 0.2, 0.6, 1. 求: 飞机坠毁概　.

- A = “飞机坠毁”, B_i = “恰好i 人击中”.
- $\mathsf{P}(\mathsf{B}_0) = (1 \quad 0.4)(1 \quad 0.5)(1 \quad 0.7) = 0.09,$

  $\mathsf{P}(\mathsf{B}_1) = 0.4(1 \quad 0.5)(1 \quad 0.7) + (1 \quad 0.4)0.5(1 \quad 0.7)$
  $\quad + (1 \quad 0.4)(1 \quad 0.5)0.7 = 0.36,$

  $\mathsf{P}(\mathsf{B}_2) = \quad = 0.41,$

  $\mathsf{P}(\mathsf{B}_3) = 0.4 \quad 0.5 \quad 0.7 = 0.14.$
- $\mathsf{P}(\mathsf{A} \ \mathsf{B}_i)$ 依次为0, 0.2, 0.6, 1.
- $\mathsf{P}(\mathsf{A}) = \sum_{i=0}^{3} \mathsf{P}(\mathsf{B}_i)\mathsf{P}(\mathsf{A} \ \mathsf{B}_i)$

  $= 0.09 \quad 0 + 0.36 \quad 0.2 + 0.41 \quad 0.6 + 0.14 \quad 1 = 0.458.$

- 定理6.2(逆概公式, Bayes公式):

  假设B_1, , B_n 是Ω 的分割, $P(A)$ 0. 则

$$P(B_k\ A) = \frac{P(B_k)P(A\ B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A\ B_i)}, \quad k = 1, \quad , n$$

推导: $P(B_k|A) \overset{\text{条件概率}}{=} \frac{P(AB_k)}{P(A)} \overset{\text{乘法公式、全概公式}}{=} \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$.

- 先验概 ; 后验概

- A 是显明的; B_1, B_n 是隐藏的.

例6.8. 某艾滋病检测法的灵敏度如下:

假阴性的概　为0.05;　假阳性的概　为0.01.

已知某地区有0.001比例人群被艾滋病感染, 检测出甲被感染.

求: 甲感染艾滋病的概　.

- 显明: T = 甲检测出被感染, T^c = 甲检测出健康;
- 隐藏: A = 甲被感染, A^c = 甲健康.
- 已知: $\mathsf{P}(\mathsf{A}) = 0.001 = \mathsf{p}$, $\mathsf{P}(\mathsf{A}^c) = 1 \quad \mathsf{p}$.

  $\mathsf{P}(\mathsf{T}\ \mathsf{A}) = 1 \quad 0.05$, $\mathsf{P}(\mathsf{T}\ \mathsf{A}^c) = 0.01$.
- 逆概公式:

$$\mathsf{P}(\mathsf{A}\ \mathsf{T}) = \frac{\mathsf{P}(\mathsf{A})\mathsf{P}(\mathsf{T}\ \mathsf{A})}{\mathsf{P}(\mathsf{A})\mathsf{P}(\mathsf{T}\ \mathsf{A}) + \mathsf{P}(\mathsf{A}^c)\mathsf{P}(\mathsf{T}\ \mathsf{A}^c)}$$

$$= \frac{0.95\mathsf{p}}{0.95\mathsf{p} + 0.01(1 \quad \mathsf{p})} = \frac{0.95\mathsf{p}}{0.94\mathsf{p} + 0.01} \approx 0.087.$$