

§1.5 条件概 与独立性

例5.1 设盒中有3个白球、2个红球，从中取出一个球，发现是白球。从剩下的4个球中任取一个，求：它还是白球的概（记为 p ）。

- 建模：不放回抽样，白球1 ~ 3，红球4, 5. $\omega = (i, j)$.

- $A = \{\omega : i \leq 3\}$, $B = \{\omega : j \leq 3\}$.

	(1, 2) ✓	(1, 3) ✓	(1, 4)	(1, 5)
(2, 1) ✓	(2, 3) ✓	(2, 4)	(2, 5)	
(3, 1) ✓	(3, 2) ✓	(3, 4)	(3, 5)	
(4, 1) ✓	(4, 2) ✓	(4, 3) ✓	(4, 5)	
(5, 1) ✓	(5, 2) ✓	(5, 3) ✓	(5, 4)	

- $p = P(AB)/P(A) = 6/12 = 1/2$, $p \neq 3/5 = P(B)$.

● 定义5.1. 假设 $P(A) > 0$. 称 $\frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ 为已知 A 发生的条件下,
 B 的条件概 . 记为 $P(B|A)$.

● 按照定义直接计算条件概 $P(B|A)$.

● 条件概: 指“重新分配权重”: $P(B|A)$ vs $P(B) = P(B|\Omega)$.

给定 A , 条件概 $P(\cdot|A)$: 满足概 定义的三个条件.

● 简化模型给出条件概: 在假设 A 发生时, 简化模型.

例5.1: 3白2红. $A =$ 一白, $B =$ 二白. (若) A 发生, 则第二次
在2白2红中抽取, $P(B|A) = 2/4$.

- 乘法公式:

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

- 定理5.1(一般乘法公式):

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1 \cdots A_{n-1})P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1}) = \cdots \\ = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cdots A_{n-1}).$$



- 解法二、记

$A_1 =$ 红心Ace与黑桃Ace不在一组;

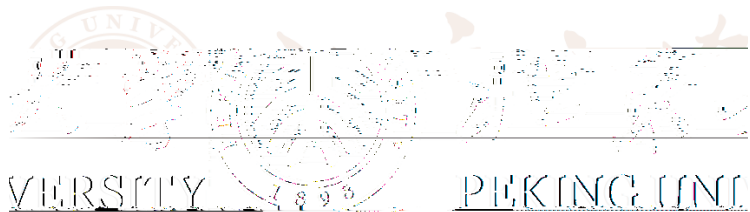
$A_2 =$ 梅花Ace与红心Ace黑桃Ace都不在一组;

$A_3 =$ 方块Ace与其他Ace都不在一组.

- 则 $E = A_1 A_2 A_3$.

- $P(A_1) = \frac{3 \times 13}{51}$, $P(A_2|A_1) = \frac{2 \times 13}{50}$, $P(A_3|A_1 A_2) = \frac{13}{49}$.

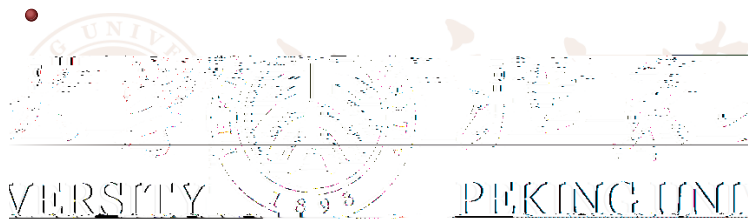
$$P(E) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) = \frac{3 \times 2 \times 13^3}{51 \times 50 \times 49}.$$

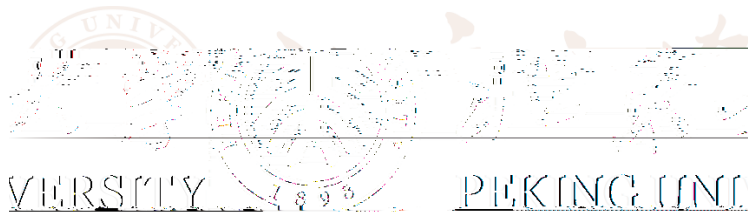




例. 甲、乙玩石头剪子布. 用 A_0, A_2, A_5 分别表示甲出石头, 剪刀, 布; 类似地, 有 B_0, B_2, B_5 . 假设 $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$ 且 A 与 B 相互独立, $i, j = 0, 2, 5$.

令 $C =$ 甲赢. 研究 A_2, B_5, C 的独立性.





例5.9. 假设每门高射炮击中敌机的概率为0.6. 现在若干门同时发射. 问: 若要以99% 的把握击中敌机, 需要配几门?

- 假设配 n 门. 记 $A_i =$ “第 i 门击中敌机”. 则

$$A = \text{“击中敌机”} = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

- $A^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$, 因此,

$$P(A^c) = \prod_{i=1}^n P(A_i^c) = 0.4^n.$$

- $P(A) = 1 - 0.4^n$. 要求 $1 - 0.4^n \geq 0.99$, 即

$$n \geq \frac{\lg 0.01}{\lg 0.4} = \frac{2}{0.3979} = 5.026.$$

- 因此, 需要至少 6 门高射炮.