§1.4. 概 的公理化定义和性质

例4.1. 投掷两枚分币.

- 建模: 用H 表示正面(国徽)朝上, (Head);

  用T 表示反面朝上, (Tail).

- 共有4 种不同结果:

$$\omega_1 = HH, \quad \omega_2 = HT, \quad \omega_3 = TH, \quad \omega_4 = TT.$$

- A = "恰有一枚正面朝上" $= \{\omega_2, \omega_3\}$;

  B = "至 一枚正面朝上" $= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$;

  C = "恰好两枚正面朝上" $= \{\omega_1\}$.

- 样本(**sample**): 试验结果, 元素, 记为ω.
- 样本空间: 所有试验结果组成的集合, 记为**Ω**.
- 事件(**event**): 部分试验结果, **Ω** 的子集, 记为$A, B, \ldots$.
- 空集$\emptyset$.
- 事件发生: (本次)试验结果$\omega \in A$;

- “并”, $A \cup B$: 事件A 发生或事件B 发生.
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, 某个事件$A_i$ 发生,

$$\{\omega : \exists\ 1 \leqslant i \leqslant n \text{ 使得} \omega \in A_i\}.$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$: $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$,

$$\{\omega : \exists\ i \text{ 使得} \omega \in A_i\},$$

- “交”, $A \cap B$, AB：事件A 发生且事件B 发生.
- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$: $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, $A_1 \cdots A_n$, 所有事件A_i 都发生

$$\{\omega : \forall i (1 \leqslant i \leqslant n) \text{ 都有} \omega \in A_i\}.$$

- $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$: $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$, $A_1 A_2 \cdots$,

$$\{\omega : \forall i \geqslant 1 \text{ 都有} \omega \in A_i\}.$$

- “补”, A^c: 事件A 不发生, 余集, 对立事件.
- “差”, $A \backslash B := AB^c$.
- 交换 、结合 、分配 . 例,

$$A \cap (B \cup C) = (AB) \cup (AC).$$

- 对偶. 例,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

- 例: 若$\Omega = [0, 1]$, $A_i = [\frac{1}{i}, 1]$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = (0, 1], \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c = \{0\}.$$

定义**4.8 & 4.9.** $\mathcal{F}$ 由一些事件组成, 如果:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(2) 若$A \in \mathcal{F}$, 则$A^c \in \mathcal{F}$;

(3) 若$A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$;

则称$\mathcal{F}$ 是(Ω 中的) σ 代数. 进一步, 又若P 是$\mathcal{F}$ 上的函数.

(4) 非负性: $P(A) \geqslant 0, \forall A \in \mathcal{F}$;

(4) 规范性(归一化条件): $P(\Omega) = 1$;

(4) 可列可加性: 若$A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, 且两两不交, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称P 是($\mathcal{F}$ 上的) 概 ; 称$P(A)$ 为A (发生)的概 ; 称$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概 空间.

定理**4.2.** 概 P 有如下性质:

- **(1)** $P(\varnothing) = \mathbf{0}$.

推导: 取$A_n = \varnothing$, $\forall n$, 则$\infty \times P(\varnothing) = P(\varnothing)$, 从而$P(\varnothing) = 0$.

- **(3)** 可加性: 若$A_1, \cdots, A_n$ 两两不交, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

推导: 取$A_m = \varnothing$, $\forall m \geqslant n+1$ 即可.

- **(2)** $P(A^c) = \mathbf{1} - P(A)$.

推导: 取$A_1 = A$, $A_2 = A^c$, $A_n = \varnothing$, $\forall n \geqslant 3$ 即可.

- **(4)** 单调性: 若$A \subset B$, 则

$$P(B) \geqslant P(A), \quad P(B \backslash A) = P(B) - P(A), \quad \mathbf{0} \leqslant P(A) \leqslant \mathbf{1}.$$

推导: $P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geqslant P(A)$.

- **(5)** **连续性**: 若$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

推导：取$B_1 = A_1$，$B_n = A_n \backslash A_{n-1}$，$n \geqslant 2$. 则，$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$，且$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

于是，左 $= P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \overset{可列可加性}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$

$\overset{可加性}{=} \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) =$ 右.

- **(6)** **连续性**: 若$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, 则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

推导：对A_n^c，$n \geqslant 1$ 使用(5).

- **(7) 次可列可加性:** $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

推导：取$B_1 = A_1$，$B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$，$n \geqslant 2$. 则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. 因此，

$$左 = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \overset{可列可加性}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \overset{单调性}{\leqslant} 右.$$

- **Jordan公式仍然成立。例，**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

例4.2 & 4.3 离散概 空间.

- $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 或$\{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$.
- $\mathcal{F}$ 由Ω 的所有子集组成.
- $p_i \geqslant 0$, $i = 1, \cdots, n$, 且$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
  或$i = 1, 2, \cdots$, 且$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.
- $P(A) = \sum_{i: \omega_i \in A} p_i$.
- 例, 古典概型, $A_i = \{\omega_i\}$ 为等概基本事件, $i = 1, \cdots, n$.
- 例, 泊松分布列. $\lambda > 0$. $\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$,

$$p_i = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots .$$