

§1.3 古典概型

- 古典概型



例3.1. 同时投掷两颗骰子, 求: 得到(总和) 7 点的概 .

- 建模: 甲、乙两颗, 甲的点数为 i , 乙的点数为 j , 总共 $6 \times 6 = 36$ 种不同结果.

- $A =$ “得到7点” 含6种结果:

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1).$

- $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

例3.3. 有 $N(\geq 2)$ 个阄, 其中 $m(< N)$ 个内含“有”字. N 位同学排队依次任取一阄. 求: 排第 i 位的同学取到有字阄的概率.

- 建模: 将阄编号, 有字 $1 \sim m$, 剩余 $m+1 \sim N$.
- 总共 $N!$ 种不同结果:

(a_1, \dots, a_N) 表示第 j 个人抽到编号为 a_j 的阄, $j = 1, \dots, N$.

- $A =$ “第 i 位同学取到有字阄”, 即 $a_i \in \{1, \dots, m\}$,

A 中含 $m(N-1)!$ 个基本事件, 于是

$$P(A) = \frac{m(N-1)!}{N!} = \frac{m}{N}.$$

- 抓阄结果与排队次序无关.

例3.5 设有一批产品, 共100件, 其中5件次品(不合格产品). 现在从中任取50件, 求: 恰好取到2件次品的概 .

- 建模: 将合格品编号1 ~ 95, 次品编号96 ~ 100.

- 总共 C_{100}^{50} 种不同结果. 例如, $\{a_1, \dots, a_{50}\}$.

- $A =$ “恰好取到2件次品”, 含 $C_{95}^{48}C_5^2$ 个基本事件. 因此,

$$P(A) = \frac{C_{95}^{48}C_5^2}{C_{100}^{50}}$$

- 例3.6. 一般地, N 件产品中含 n 件次品, 任取 m 件, $A =$ “恰好取到 r 件次品”. 则

$$P(A) = \frac{C_{N-n}^{m-r} C_n^r}{C_N^m}.$$

- 定理3.1. 更一般地, N 件产品分 k 类, 第 i 类有 N_i 件 ($N_1 + \dots + N_k = N$). 从中任取 m 件, $A =$ “第 i 类恰有 m_i 件, $i = 1, \dots, k$ ”

$$P(A) = \frac{C_{N_1}^{m_1} \dots C_{N_k}^{m_k}}{C_N^m}.$$

例3.9. N 位学生, 排队参加口试. 设有 n 个考签, 被抽到的考签用后随即放回, 求: “考试结束时有考签没被抽到” 的概率.

- 建模: 考签编号 $1 \sim n$. 共有 n^N 种结果:

(a_1, \dots, a_N) 表示第 i 位学生抽到 a_i 号考签,

- $A_i =$ “第 i 号考签未被抽到”, 含 $(n-1)^N$ 个基本事件.

- $A =$ “至少有一个考签没有被抽到”, 含 \quad 个基本事件?

$$A = \bigcup_{i=1}^N A_i.$$

定理3.2.(Jordan公式)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n).$$

$P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = \frac{(n-k)^N}{n^N}$, 因此,

$$P(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k \frac{(n-k)^N}{n^N}.$$