段往¯

——追 李忠老“

周Þ

2021.12.21

八二 秋天，北Œê学 招Â 百五›多个新)，我´其中之 。我们 级分 o个小班。Œ‘全 级 起上， 题‘小班分m上。 级上学期Ú 学期，李忠老“给我们 级讲Ç《ê学分析》的Œ‘，张心明老“ú任 班Ú二班的助 ，同ž兼任 班的班主任。田小 老“ú任三班Úo班的助 ，同ž兼任三班的班主任。吴宝‰老“ú任 级主任。后来 为李老“弟子的方丽萍同学在二班，wB珍同学在o班，而我在三班。 当 ，李老“刚l瑞¬Zurich Œ学访学回I，´ 里屈指Œê的改革m放后 访8I的老“。¦在I外学到 许多 的ê学g ， 备 当的I际À 。¦ ž只有o›8•，风华正茂，才华î ， 气风发，魅力›足。我们 级é幸运地由¦这 的老“来执 。八五 S季学期，¦又 L我们 级的《复变¼ê》。跟‘李老“学L三个学期，我学到 许多分析的硬功夫。我后来l¯偏微分方 的研 ´ 为我对我的分析功底é有信心，而我的分析基：得 于李老“的谆谆 诲。八› “Ú › “ê学 还在 院，每个 研¿在 里只有 个办公¿。李老“á于¼êØ 研¿。¦每周给我们上两gŒ‘，每gŒ‘两个小ž。张老“Ú田老“在李老“的指导 每周给我们上 g 题‘，每g两小ž。, 外，李老“每周还在 研¿安 两小ž的‰ 。 个 “老“们 学极为认真，同学们学 极为勤奋。李老“讲‘重点突 ， 入浅 ，听¦讲‘´ 种 É。¦平 人，Ú蔼Œ亲， É同学们的爱•。l八二 到 在 三› ，但有件¯我印 é ，至 回 起来仍历历在 。

记得´ 秋的 个 午，我去找 研¿找李老“‰ 。李老“刚给我们讲完这 的 个定理：闭区间上的连续¼ê 致连续。当ž我们才 > 点点¢ê理ØÚ极 理Ø，这个定理的证明 得非 奥Ú复杂。我找 个简ü¼ê$\sqrt{1-x^2}$(ü位圆的 部分)， 根 定 直 证明$\sqrt{1-x^2}$在$[0;1]$上 致连续，即证明

对于任 $" > 0$，•在 $=$ $(") > 0$¦得当$x_1; x_2 \in [0;1]$且$|x_1 - x_2| \leq$ ž，

$$\left|\sqrt{1-x_1^2} - \sqrt{1-x_2^2}\right| < ": \tag{1}$$

当ž我的　法´证明

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right| &= \left|\frac{x_2^2-x_1^2}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}}\right| \\
&\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}} \\
&< '':
\end{aligned}
$$

但´我遇到　Œæ烦。•然$|x_2-x_1|$Œ　选取é小，但当$x_1;x_2$　　1ž$\sqrt{1-x_1^2}$Ú$\sqrt{1-x_2^2}$　Œ　é小。于´后面的不等ª没法›制。我百g不得其　，只Ð去找李老“‰　。

见　李老“，¦　让我讲　讲我的g´Ú困惑. 听完后，¦轻描淡写地`：“　不´³　$x_1;x_2$　1í？　么　　假　$x_1;x_2$在1附　，这žÿ$\sqrt{1-x_1^2}$, $\sqrt{1-x_2^2}$都　　0, §们的　当然Œ　任　小。如Jx_1离1有　个正的　离，　写的不等ª的分　　有正的　　，这ž不等ª　Œ›制　。”当ž我茅塞顿m，恍然Œ悟。原来证明Œ　如d直　　当，如d简明扼　。用ê学语言来讲，李老“的证明如　：

不妨　$x_1<x_2$. 由$\sqrt{1-x^2}$的连续性，•在　$_0\in(0;1)$, ¦得当$x\in[1-\ _0;1]$ž，

$$\sqrt{1-x^2}<'':$$

分两种情形讨Ø。

(1) $x_1\in[1-\ _0;1]$.

dž　然

$$\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\le\sqrt{1-x_1^2}<'':$$

(2) $x_1\in[0;1-\ _0]$.

这ž

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right| &\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-x_1^2}+\sqrt{1-x_2^2}} \\
&\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{1-(1-\ _0)^2}} \\
&\le \frac{2|x_2-x_1|}{\sqrt{\ _0}}:
\end{aligned}
$$

取　$_1=\dfrac{''\sqrt{\ _0}}{2}$，则当$|x_1-x_2|\le\ _1$ž，

$$\left|\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\right|<'':$$

综上，取　$=\min\{\ _0;\ _1\}$, 当$|x_1-x_2|\le$　ž，不等ª(1)　立。

我原　的　法´奔着证明$\sqrt{1-x^2}$在$[0;1]$上´Lipschitz¼ê的´子去的，但　个Œ导的Lipschitz¼ê的导ê　定有　，而$\sqrt{1-x^2}$的导ê在1的附　无　。　d我的g´不Œ对头。而李老“的证明的巧妙之?在于将区间$[1-\ _0;1]$刨掉，然后在区间$[0;1-\ _0]$上•Ä问题。　然在d区间上$\sqrt{1-x^2}$÷足Lipschitz条件。李老“的证明Œ刀阔斧，简ü o放。对于刚入学的　学者来`，简ü　懂。当ž我　得¦的证明•

Ð，但仍然不 么 - 人 ÷ ，然而我 不 更 Ð 的办法。 日我又重新 " À ¼ ê $\sqrt{1-x^2}$，终于找到个简 的证明。证明如 ：

证明不等 ª

$$\sqrt{1-x_1^2}-\sqrt{1-x_2^2}\le\sqrt{2(x_2-x_1)};\quad 0\le x_1\le x_2\le 1; \tag{2}$$

即 ¼ ê $\sqrt{1-x^2}$ ´ $\frac{1}{2}$ Holder连续的，然后取 $=\frac{"^2}{2}$, 则不等 ª (1) 立。

不等 ª (2) ´ 如 Û 发 的 ？将 ¼ ê $\sqrt{1-x^2}$的x换 $1-x$，则得到 ¼ ê $\sqrt{1-(1-x)^2}$。在0点附 ，这个 ¼ ê 不多 ´ $\sqrt{2x}$, 而$\sqrt{x}$ ´ $\frac{1}{2}$ Holder连续的，即

$$\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\le\sqrt{x_2-x_1};\quad 0<x_1\le x_2: \tag{3}$$

于 ´ 猜测$\sqrt{1-x^2}$在$[0;1]$上$\frac{1}{2}$ Holder连续，即不等 ª (2). 至于不等 ª (2)，只需将第二 到右端，两边平方，即 Œ 证明。这个证明 é 漂 ，但 给 学者讲清 证明 g ，却不 ´ 么容 。还 ´ 李老 “ 的证明更直 ，更容 被人 É 。

这学期我在北 Œ 给 级本 ‰) 高等 ê Æ 我 高等 ê Æ Œ p 等 ê] T J Æ ê T f ê T ê